

# FAQ: ¿Por qué $0.999\dots$ es igual a 1?

José Ángel Cid

Diario Jaén, 17 de febrero de 2011

The image shows a newspaper clipping from 'EL RINCÓN MATEMÁTICO'. It features a portrait of José Ángel Cid, a mathematician from the Department of Mathematics at the University of Jaén. The article title is 'FAQ: ¿Por qué 0.999... es igual a 1?'. The text discusses the common confusion about the equality of  $0.999\dots$  and 1, providing a simple argument:  $1/3 = 0.333\dots$ , so  $1 = 3 \cdot 1/3 = 3 \cdot 0.333\dots = 0.999\dots$ . It also mentions the general procedure of multiplying by 10 and subtracting the original number to convert repeating decimals into fractions. A small graphic of a triangle with numbers inside is also visible.

Ésta es una de las cuestiones que genera mayor confusión entre mis alumnos, así que voy a tratar de aclararla. Un argumento sencillo es el siguiente:  $\frac{1}{3} = 0.333\dots$  y multiplicando por 3 ambos lados de la igualdad se obtiene que  $1 = 3 \cdot \frac{1}{3} = 3 \cdot 0.333\dots = 0.999\dots$ . También podemos utilizar el procedimiento general que nos permite convertir cualquier número decimal periódico en una fracción. Para ello multiplicamos el número  $0.999\dots$  por 10 y le restamos el propio número, obteniendo por un lado

$$10 \cdot 0.999\dots - 0.999\dots = 9 \cdot 0.999\dots$$

y por otro

$$10 \cdot 0.999\dots - 0.999\dots = 9.999\dots - 0.999\dots = 9.$$

Entonces  $9 \cdot 0.999\dots = 9$  y despejando  $0.999\dots = \frac{9}{9} = 1$ .

En realidad la representación decimal  $0.999\dots$  es una notación para indicar la serie

$$\frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \dots$$

donde la suma continúa indefinidamente. Para calcular el valor de la serie tenemos que sumar una cantidad finita de términos y luego ver hacia qué límite se aproximan esas sumas. Por lo tanto  $0.999\dots$  representa el límite de la sucesión de las sumas de los primeros  $n$  términos de la serie, que es  $1 - \frac{1}{10^n}$ , y como esta sucesión tiende a 1 cuando  $n$  tiende a infinito se sigue de nuevo que  $0.999\dots = 1$ .

La dificultad para aceptar este resultado puede deberse a que  $0.999\dots$  y 1 se escriben de forma distinta, pareciendo entonces que son números diferentes. Sin embargo un poco de reflexión basta para convencernos de que ésta no es una objeción seria, al fin y al cabo aceptamos que 1,  $1.00$  y  $\frac{9}{9}$  son el mismo número. En mi opinión una razón más profunda para desconfiar de la igualdad es la sensación íntima de que  $0.999\dots$  está muy próximo a 1 pero nunca llega a valer 1. Este argumento sería válido si sólo hubiera un número finito de nueves después de la coma decimal, pero los puntos suspensivos “...” nos indican que éstos no terminan nunca y entonces no puede haber ningún número entre  $0.999\dots$  y 1.

Si después de todo usted sigue pensando que  $0.999\dots$  es un poco menor que 1 le gustará saber que en los años 60 del siglo pasado el matemático Abraham Robinson creó una extensión de los números reales en la que la diferencia entre 1 y  $0.999\dots$  puede ser positiva aunque infinitesimal. La principal motivación del “Análisis no estándar” fue recuperar de una forma rigurosa el espíritu del Cálculo tal y como lo entendían sus creadores Newton y Leibniz. Sin embargo en el sistema estándar sigue siendo cierto que  $0.999\dots = 1$ .

Para saber más:

- I. Stewart, *Baúl de tesoros matemáticos*, Crítica, (2010). Pág. 154–157.
- Wikipedia,  $0.999\dots$ , artículo en inglés disponible en <http://en.wikipedia.org/wiki/0.999...>
- K. U. Katz and M. G. Katz, When is .999... less than 1?, *TMME*, vol. 7, no. 1, (2010) 3–30
- L. Luna, La insuficiencia del discurso racional, *Biblioteca Nueva*, (2009). Pág. 137–138.

• T. Gowers, Real numbers as infinite decimals, artículo disponible en <http://www.dpmms.cam.ac.uk/~wtg10/decimals.html>.

### Comentario Final:

En vista del resumen hecho por el periodista del Diario Jaén debo admitir que mi exposición ha sido un fracaso total. ¿O será que el periodista es un firme partidario del *Análisis no estándar*?

