# SOLUCIÓN AL PROBLEMA 400, GACETA DE LA RSME VOL. 24.2 (2021), 338—339

JOSÉ ÁNGEL CID

**Problema 400 propuesto por Daniel Cao Labora:** Sea $d$ un número entero positivo cualquiera tal que $d+1$ es primo, y sea $n$ un número natural. Probar que la suma

$$S_{n,d} := \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{1+j\cdot d}$$

es un número entero si y solo si $n = 0$.

**Solución:** Si $p$ es un número primo se define el *orden $p$-ádico* de un número natural $m > 0$, $\nu_p(m)$, como la mayor potencia de $p$ que divide a $m$, es decir, $\nu_p(m) = \alpha$ si y solo si $p^\alpha | m$ y $p^{\alpha+1} \not| m$. Si $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}_+$ se define su orden $p$-ádico mediante la fórmula

$$\nu_p\left(\frac{a}{b}\right) = \nu_p(a) - \nu_p(b).$$

Es fácil comprobar que $\nu_p$ está bien definido y cumple las siguientes propiedades:

(i) $\nu_p(x\cdot y) = \nu_p(x) + \nu_p(y)$, $x, y \in \mathbb{Q}_+$.

(ii) Si $x, y \in \mathbb{Q}_+$ con $\nu_p(x) \neq \nu_p(y)$ entonces $\nu_p(x+y) = \min\{\nu_p(x), \nu_p(y)\}$.

Si sabemos que $x \in \mathbb{Q}_+$ entonces $x \in \mathbb{N}$ si y solo si $\nu_p(x) \geq 0$ para todo primo $p$. Esta propiedad nos proporciona una estrategia para abordar el problema: si existe un primo $p$ tal que $\nu_p(x) < 0$ entonces $x$ no puede ser un número natural.

Dado el enunciado del problema es razonable probar con el número primo $p = d+1$ (téngase en cuenta entonces que $d = p-1$). En efecto, se cumple que para todo $r \in \mathbb{Z}$, $r \geq 0$:

(1) Si $j_r = p^r + p^{r-1} + \ldots + p + 1$ entonces

$$\nu_p(1 + j_r \cdot d) = \nu_p(1 + (p^{r+1} - 1)) = \nu_p(p^{r+1}) = r+1.$$

(2) Si $j_r < j < j_r + p^{r+1} = j_{r+1}$ entonces

$$\nu_p(1 + j\cdot d) = \nu_p(p^{r+1} + (j - j_r)\cdot d) < r+1.$$

Por tanto, si $j_r \leq n < j_{r+1}$, aplicando reiteradamente la propiedad (ii), se sigue que

$$\nu_p\left(S_{n,d}\right) = \nu_p\left(\frac{1}{1 + j_r \cdot d}\right) = -(r+1) < 0,$$

y el problema estaría resuelto.

El argumento anterior se extiende fácilmente al caso en que $d+1$ es potencia de un primo. El caso general ($d \in \mathbb{Z}$, $d > 0$) también es cierto, aunque la demostración no es tan sencilla, y tiene una historia interesante que se resume a continuación.

**Nota:** El caso $d = 1$ se corresponde con los números armónicos

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots \frac{1}{n}.$$

Es bien conocido que $H_n$ no es un número entero para $n > 1$, resultado que se remonta a 1915, [10]. En 1918 Kürschák probó que los números

$$H_{a,n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{a+1} + \dots \frac{1}{a+n}, \quad a, n \in \mathbb{Z},\ a, n \geq 1,$$

tampoco son enteros, [7]. Si los términos de la serie armónica que se suman no son consecutivos sí es posible obtener un número entero: por ejemplo, $2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$ y un ejemplo menos trivial puede verse en [8], donde 453 términos de la serie armónica producen una suma igual a 6. Sin embargo ya Nagell en 1923, [9], y de forma independiente un joven Erdös en 1932, [2], en uno de sus primeros artículos, probaron que la suma de los inversos de cualquier progresión aritmética

$$H_{a,n,d} = \frac{1}{a} + \frac{1}{a+d} + \dots \frac{1}{a+nd}, \quad a, n, d \in \mathbb{Z},\ a, n, d \geq 1,$$

no es un número entero (el teorema de Erdös aparece también comentado en la página 157 de [5] en relación con la tesis de Ron Graham sobre fracciones egipcias). Puesto que

$$S_{n,d} = H_{1,n,d},$$

el teorema de Nagell y Erdös resolvería el presente problema eliminando la hipótesis sobre la primalidad de $d+1$. En [1, 3, 4, 6] también puede encontrarse información interesante sobre diversas generalizaciones relacionadas con este problema.

## References

[1] Y. G. Chen y M. Tang, On the elementary symmetric functions of $1, 1/2, \dots, 1/n$, Amer. Math. Monthly, 119, 862–867, (2012).

[2] P. Erdös, Generalization of an elementary number-theoretic theorem of Kürschák. (Verallgemeinerung eines elementar-zahlentheoretischen Satzes von Kürschák) Mat. Fiz. Lapok 39, 17–24 (1932).

[3] P. Erdös y I. Niven, Some properties of partial sums of the harmonic series, Bull. Am. Math. Soc. 52, 248–251 (1946).

[4] Y. L. Feng, S. F. Hong, X. Jiang, y Q. Y. Yin, A generalization of a theorem of Nagell, Acta Math. Hung. 157, No. 2, 522–536 (2019).

[5] P. Hoffman, El hombre que solo amaba los números, Ediciones Granica, 2000.

[6] S. F. Hong y C. L. Wang, The elementary symmetric functions of reciprocal arithmetic progressions, Acta Math. Hungar., 144, 196–211, (2014).

[7] J. Kürschák, Über die harmonische Reihe, Math. és phys. lapok 27, 299–300 (1918).

[8] G. Martin, Egyptian fraction summing to 6. https://www.math.ubc.ca/~gerg/papers/downloads/recsum6.pdf

[9] T. Nagell, Eine Eigenschaft gewisser Summen, Skrifter Oslo 1923 (1924), Nr. 13, 10–15 (1923).

[10] L. Theisinger, Bemerkung über die harmonische Reihe, Monatsh. f. Math. 26, 132–134 (1915).

Departamento de Matemáticas, Universidade de Vigo, Campus de Ourense, 32004, Spain

*Email address*: angelcid@uvigo.es