Miniaturas matemáticas de La Gaceta de la RSME
Vol. 24 (2021), Núm. 3, Pág. 484

$F_8 = 3 \cdot 7$ implica la infinitud de los primos

La sucesión de Fibonacci $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_n := F_{n-2} + F_{n-1}$ para $n \geq 3$, posee múltiples propiedades y sorprendentes aplicaciones. Una de ellas es que permite probar la infinitud de los números primos, tal y como se recoge en [2, demostración 7]. La idea original se remonta a Wunderlich [3] y se basa en la propiedad

$$[1, \text{Lemma 3.1.9 (b)}]: \qquad \operatorname{mcd}(F_n, F_m) = F_{\operatorname{mcd}(n,m)}. \tag{1}$$

Su argumento es el siguiente (la demostración original de [3] está incompleta porque no tiene en cuenta que $F_2 = 1$ no admite divisores primos; aquí recogemos la versión dada en [1, página 83]): supongamos que la lista de primos $p_1 = 2 < p_2 = 3 < p_3 = 5 < \cdots < p_r$ es finita y consideremos los números de Fibonacci $2 = F_{p_2} < F_{p_3} < \cdots < F_{p_r}$. Entonces, por (1), estos $r-1$ números son coprimos y además son mayores que 1. Por tanto, existe a lo sumo un F_{p_i} divisible por dos primos diferentes. Por otro lado, $F_{19} = 4181 = 37 \cdot 113$ y $F_{31} = 1346269 = 557 \cdot 2417$ tienen ambos dos factores primos, con lo que se llega así a una contradicción.

Vamos a ver que una pequeña variante del argumento de Wunderlich permite concluir la infinitud de los primos a partir de cualquier sucesión de números naturales x_n con las siguientes propiedades:

- Si $\operatorname{mcd}(n, m) = 1$ entonces $\operatorname{mcd}(x_n, x_m) = 1$.
- Si $p \geq 3$ es primo entonces $x_p > 1$.
- Existe un entero $k \geq 0$ tal que x_{2^k} es divisible por dos primos distintos.

Ahora, si el conjunto de primos fuera finito, y usando la notación anterior, $x_{p_2}, x_{p_3}, \ldots, x_{p_r}$ serían $r-1$ números coprimos mayores que 1 que tendrían como máximo $r-2$ divisores primos (los r primos existentes menos los factores primos de x_{2^k}, que es coprimo con todos ellos), llegando así a una contradicción. Claramente, la sucesión $x_n = F_n$ satisface las dos primeras propiedades, y para comprobar la tercera basta calcular $F_8 = 21 = 3 \cdot 7$, una factorización mucho más sencilla que la de F_{19} o F_{31}.

Referencias

[1] B. Fine y G. Rosenberger, *Number theory. An introduction via the density of primes*, segunda edición, Birkhäuser/Springer, Cham, 2016.

[2] D. Sadornil y J. L. Varona, Existen infinitos primos (desde Euclides hasta el siglo XXI), *La Gaceta de la RSME* **24** (2021), no. 2, 301–324.

[3] M. Wunderlich, Classroom Notes: Another proof of the Infinite Primes Theorem, *Amer. Math. Monthly* **72** (1965), no. 3, 305.

José Ángel Cid, Departamento de Matemáticas, Universidade de Vigo
Correo electrónico: angelcid@uvigo.es
Página web: http://angelcid.webs.uvigo.es/