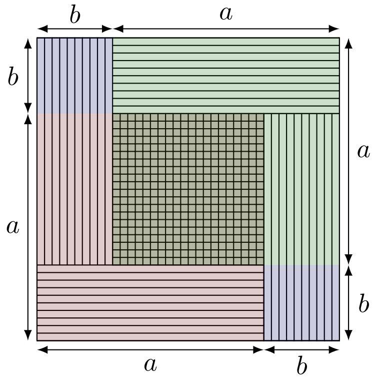
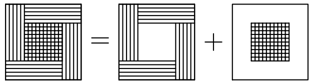
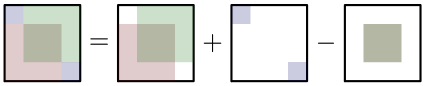
Una Figura, Dos Identidades, ¡Seis Teoremas!



$$(*)\quad (a+b)^2 = 4ab + (a-b)^2$$



$$(**)\quad (a+b)^2 = 2a^2 + 2b^2 - (a-b)^2$$



Teorema 1. *La suma de un número positivo y su recíproco es al menos* 2.

Teorema 2. *La media aritmética supera a la media geométrica.*

Teorema 3. $F_{n+1}^2 = 4F_nF_{n-1} + F_{n-2}^2$*, siendo* F_n *el n-ésimo número de Fibonacci.*

Teorema 4. $F_{n+1}^2 = 2F_n^2 + 2F_{n-1}^2 - F_{n-2}^2$*, siendo* F_n *como en el teorema anterior.*

Teorema 5. *La media de los cuadrados supera al cuadrado de la media.*

Teorema 6. $\sqrt{2}$ *es irracional.*

Demostración. **1.** $a = x > 0,\ b = \dfrac{1}{x} \overset{(*)}{\Longrightarrow} \left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2 \geq 4 \Longrightarrow x + \dfrac{1}{x} \geq 2.$

2. $(*) \implies (a+b)^2 \geq 4ab \implies \dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}.$

3. $F_n = a,\ F_{n-1} = b \Longrightarrow F_{n+1} = a+b,\ F_{n-2} = a-b \overset{(*)}{\Longrightarrow} F_{n+1}^2 = 4F_nF_{n-1} + F_{n-2}^2.$

4. $F_n = a,\ F_{n-1} = b \Longrightarrow F_{n+1} = a+b,\ F_{n-2} = a-b \overset{(**)}{\Longrightarrow} F_{n+1}^2 = 2F_n^2 + 2F_{n-1}^2 - F_{n-2}^2.$

5. $(**) \implies 2a^2 + 2b^2 \geq (a+b)^2 \implies \dfrac{a^2+b^2}{2} \geq \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2.$

6. $a, b \in \mathbb{N},\ b < a,\ \dfrac{(a+b)^2}{a^2} = 2$ (irreducible) $\overset{(**)}{\Longrightarrow} \dfrac{(a-b)^2}{b^2} = 2,\ 0 < a-b < a+b.$

Bibliografía

[1] C. Alsina y R. B. Nelsen, *Math Made Visual*, MAA, 2006.

[2] A. Bogomolny, Square Root of 2 is Irrational, *Interactive Mathematics Miscellany and Puzzles*, http://www.cut-the-knot.org/proofs/sq_root.shtml

José Ángel Cid, Departamento de Matemáticas, Universidad de Vigo
Correo electrónico: angelcid@uvigo.es
Página web: http://angelcid.webs.uvigo.es/