Propuesto por Juan Bosco Romero Márquez
Universidad de Valladolid, Valladolid

Solución

Se obtiene sin ninguna dificultad por procedimientos elementales que $\lim_{t\to x} \frac{M_\gamma(t,x)-x}{t-x} = \frac{1}{2}$, $\gamma \in \mathbb{R}$. Fijado $x \in (0,\infty)$ y denotando $F_\gamma(t) = M_\gamma(f(t), f(x))$, resulta

$$\frac{F_\gamma(t) - F_\gamma(x)}{t-x} = \frac{M_\gamma(f(t), f(x)) - f(x)}{M_\gamma(t,x) - x} \frac{M_\gamma(t,x) - x}{t-x}, \quad \gamma \in \mathbb{R}.$$

En consecuencia, la función $F_\gamma(t)$ es derivable en $t = x$ si y sólo si f es derivable en x por sus medias de orden γ. Además, $F'_\gamma(x) = f_\gamma(x)/2$.

Ahora es claro que si f es derivable en x, $F_\gamma(t)$ (función derivable de $f(t)$) es también derivable en $t = x$ y la prueba de la parte a) está concluida. Para la parte b) basta observar que $f(x) = \frac{(F_0(t))^2}{f(x)}$ y $f(x) = (2(F_\gamma(t))^\gamma - f(x)^\gamma)$, si $\gamma \neq 0$ y, así, si una cualquiera de las funciones $F_\gamma(t)$ es derivable en x la función f será derivable en x.

Solución enviada por Jaime Vinuesa Tejedor
Universidad de Cantabria, Santander.
También resuelto por J. Mir, M. Peña y J. Sierra (estudiantes) y el proponente
(todos ellos resuelven únicamente el apartado a))

Nota. El resto de soluciones al apartado a) prueban que $f_\gamma(x) = f'(x)$.

Problema 31

Sea G un grupo y H_1, H_2 dos de sus subgrupos propios. Probar que $G \setminus (H_1 \cap H_2)$ y $G \setminus (H_1 \cup H_2)$ no son cerrados respecto a la operación del grupo G.

Propuesto por Pantelimon George Popescu (estudiante)
Universidad Politécnica de Bucarest, Rumanía

Solución

Nota. Para que tenga sentido el enunciado del problema es necesario probar que $G \setminus (H_1 \cup H_2) \neq \emptyset$ siempre que H_1 y H_2 sean subgrupos propios de G.

DEMOSTRACIÓN DE LA NOTA. Si $H_1 \cup H_2$ no es subgrupo, el resultado es claro. Si $H_1 \cup H_2$ es un subgrupo de G, entonces se puede probar que $H_1 \subseteq H_2$ o $H_2 \subseteq H_1$. En efecto, si suponemos que $x \in H_2 \setminus H_1$ e $y \in H_1 \setminus H_2$, y tomamos $z = xy \in H_1 \cup H_2$ (por ser $H_1 \cup H_2$ un subgrupo), llegamos a que, si $z \in H_1$, entonces $x = zy^{-1} \in H_1$ (lo que no puede ser), y si $z \in H_2$ entonces $y = x^{-1}z \in H_2$ (lo que tampoco puede ser). Por tanto, si $H_1 \cup H_2$ es un subgrupo de G entonces $H_1 \cup H_2 = H_1$ o $H_1 \cup H_2 = H_2$ y como ambos son subgrupos propios de G se tiene que $H_1 \cup H_2$ también es un subgrupo propio de G. Luego $H_1 \cup H_2 \neq G$.

RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA.
Lema. Si $e \in H$ y $H = H^{-1} := \{x^{-1} : x \in H\}$ es un subconjunto de G, con $H \neq G$, entonces el producto de G no es una operación cerrada sobre $G \setminus H$.
Demostración del Lema. Sea $x \in G \setminus H$. Entonces $x^{-1} \in G \setminus H$ (pues en otro caso tendríamos que $x = (x^{-1})^{-1} \in H$). Ahora bien, $e = x \cdot x^{-1} \in H$.
Corolario. Si $H_1, H_2 \leq G$ son dos subgrupos propios del grupo G entonces el producto de G no define una operación cerrada sobre $G \setminus (H_1 \cup H_2)$ ni sobre $G \setminus (H_1 \cap H_2)$.
Demostración del Corolario. Basta aplicar el Lema a $H = H_1 \cup H_2$ y a $H = H_1 \cap H_2$.

Solución enviada por J. M. Almira y J. Á. Cid
E. U. P. de Linares, Jaén
También resuelto por J. López (estudiante) y el proponente

PROBLEMA 32

Los puntos raíces de la ecuación de coeficientes enteros

$$243z^4 - 810z^3 + 1080z^2 - 1\text{[illegible]}z + \text{[illegible]}5 = 0$$

son cuatro vértices de un pentágono regular. Calcular las coordenadas del quinto vértice.

NOTA. Aunque cayeron unas manchas de tinta, el problema puede resolverse sin necesidad de recuperar los coeficientes ocultos.

Propuesto por Jaime Vinuesa Tejedor
Universidad de Cantabria, Santander