

satisfacer estas nociones mediante los llamados “Axiomas”. Así, si en el juego *Dobble* llamamos “puntos” a las figuras y “líneas” a las cartas, la principal propiedad del juego establece que dos líneas cualesquiera (cartas) siempre se intersecan en un único punto (figura). Como veremos, el modelo geométrico que se corresponde con *Dobble* no es el de la geometría euclidiana –donde existen rectas que no se cortan (paralelas)– sino el de la geometría proyectiva, donde, además de no existir rectas paralelas, se cumple una bella simetría (dualidad) que permite intercambiar “líneas” y “puntos” en los teoremas sin afectar a su validez (por ejemplo, en *Dobble* también se cumple que dos figuras cualesquiera están siempre contenidas en una única carta³).

La relación entre *Dobble* y la geometría proyectiva es conocida, empezando por la referencia que se hace a la misma en las propias instrucciones del juego, y ha sido analizada en diversos artículos, como por ejemplo Bourrigan (2011), Deléglise (2013), Polster (2015), Puzzlewocky (2020) y Sengupta (2016). Sin embargo, hasta donde nosotros sabemos, no existe bibliografía en castellano sobre este tema. Nuestro objetivo con este artículo es triple: en primer lugar, nos gustaría rellenar esta laguna proporcionando una referencia en castellano sobre esta asombrosa conexión. En segundo lugar, queremos dar a conocer una construcción de los planos proyectivos finitos mediante conjuntos de diferencia perfecta y discos de Penrose que resulta novedosa en este contexto, además de tremendamente útil. En tercer lugar, queremos dar a conocer algunos de los resultados obtenidos dentro del programa STEMBach del IES Blanco Amor de Ourense y animar a otros profesores a desarrollar con sus alumnos proyectos basados en juegos como el propio *Dobble* u otros como SET (Hsu, Ostroff y Van Meter, 2020).

El presente artículo está organizado como sigue: en la Sección 2 indicamos cómo construir los cuerpos finitos e introducimos los planos proyectivos de orden n de forma axiomática, así como una serie de resultados interesantes relativos a su número de puntos y líneas. En la Sección 3 se definen los conjuntos de diferencia perfecta y los discos de Penrose generados por ellos, que permiten representar de forma sencilla las líneas de un plano proyectivo de orden n , siendo n potencia de un primo. En la Sección 4 se usan los métodos de la sección anterior para desvelar las dos cartas que faltan en *Dobble* y para construir nuevos juegos con diferente número de cartas y figuras. Finalmente, en la Sección 5, mostraremos diversas conexiones de la geometría finita con otras áreas.

2. Cuerpos finitos y planos proyectivos

Cuando un cuerpo \mathbb{K} tiene un número finito de elementos se llama **cuerpo finito**. Los cuerpos finitos tienen algunas propiedades sorprendentes, como el Teorema de Wedderburn (Aigner y Ziegler, 2018), que afirma que todo cuerpo finito es conmutativo –a diferencia del caso infinito donde los cuaterniones son un ejemplo de cuerpo no conmutativo⁴–, e incluso han sido propuestos como posibles modelos para la realidad física (Penrose, 2006). Para nuestros propósitos, lo relevante es que a partir de cualquier cuerpo finito con n elementos es posible generar un plano proyectivo de orden n . Los cuerpos finitos más sencillos se obtienen como congruencias módulo un número primo.

Definición 1. Decimos que a y b son **congruentes módulo n** si ambos dejan el mismo resto al dividirlos entre n , o equivalentemente si $a - b$ es múltiplo de n . Escribiremos

$$a \equiv b \pmod{n}.$$

La congruencia módulo n es una relación de equivalencia, y la clase de equivalencia de un entero a se denota como $[a]_n$, o simplemente $[a]$ si sobreentendemos el módulo. El conjunto cociente de todas las clases de equivalencia módulo n se denota como

$$\mathbb{Z}_n = \{[0], [1], [2], \dots, [n-1]\}.$$

Sean $[a]_n$ y $[b]_n$ las clases de equivalencia módulo n de a y b respectivamente. Se definen las operaciones suma y multiplicación mediante:

$$\begin{aligned} [a]_n + [b]_n &= [a + b]_n, \\ [a]_n \cdot [b]_n &= [a \cdot b]_n. \end{aligned}$$

De este modo, \mathbb{Z}_n se convierte en un anillo con n elementos que, además, es un cuerpo si y sólo si n es un número primo. Éstos son los cuerpos finitos más simples, pero ya en el siglo XIX se demostró, siguiendo la obra de Galois, que existe un cuerpo finito con q elementos si y sólo si q es potencia de un primo (se sabe también que este cuerpo es único salvo isomorfismo). Este cuerpo, denotado por $GF(q)$, llamado el cuerpo de Galois de orden q , no es igual a \mathbb{Z}_q a no ser que q sea primo. La importancia de los cuerpos $GF(q)$ en geometría proyectiva finita es que su existencia nos permite construcciones que pueden ser extendidas de primos a potencias de primos.

En términos generales, $GF(p^m)$ con p primo y $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$, puede ser construido como sigue:

1. Encontramos un polinomio $f(x)$ de grado m , con coeficientes en \mathbb{Z}_p que sea irreducible sobre \mathbb{Z}_p es decir, que no pueda ser expresado como producto de dos polinomios de menor grado con coeficientes en \mathbb{Z}_p .
2. Luego tomamos como elementos de $GF(p^m)$ a todos los polinomios sobre \mathbb{Z}_p de grado menor que m . Tales polinomios serán de la forma

$$a_{m-1}x^{m-1} + a_{m-2}x^{m-2} + \dots + a_1x + a_0,$$

donde hay p posibilidades para cada a_i ; en consecuencia, habrá p^m de tales polinomios.

3. Se dota a $GF(p^m)$ con estructura de cuerpo definiendo las siguientes operaciones:
 - a) La suma se realiza sumando los coeficientes correspondientes $(\text{mod } p)$.
 - b) La multiplicación se realiza $(\text{mod } f(x))$, es decir, multiplicando de manera normal en el anillo de polinomios con coeficientes en \mathbb{Z}_p y luego tomando el resto de la división del producto obtenido entre $f(x)$.

Ejemplo 1. Construcción de un cuerpo de orden 4, es decir, con $4 = 2^2$ elementos.

Tomamos $f(x) = x^2 + x + 1$ como polinomio irreducible⁵. Los elementos del cuerpo serán $0, 1, x, x + 1$, y la suma y multiplicación se lleva a cabo como sigue:

+	0	1	x	$x+1$
0	0	1	x	$x+1$
1	1	0	$x+1$	x
x	x	$x+1$	0	1
$x+1$	$x+1$	x	1	0

·	0	1	x	$x+1$
0	0	0	0	0
1	0	1	x	$x+1$
x	0	x	$x+1$	1
$x+1$	0	$x+1$	1	x

Por ejemplo,

$$x + (x + 1) \equiv 2x + 1 \equiv 1 \pmod{x^2 + x + 1}, \text{ puesto que } 2 \equiv 0 \pmod{2};$$

$$x \cdot (x + 1) \equiv x^2 + x \equiv (x^2 + x + 1) + 1 \equiv 1 \pmod{x^2 + x + 1};$$

$$(x + 1)^2 \equiv x^2 + 2x + 1 \equiv x^2 + 1 \equiv (x^2 + x + 1) + x \equiv x \pmod{x^2 + x + 1}.$$

A continuación, presentamos la definición axiomática de plano proyectivo finito. Como se ha indicado anteriormente, los términos básicos permanecen sin definir, lo que proporciona una gran versatilidad y potencia a este enfoque.

Definición 2. *Un plano proyectivo finito de orden n , $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ es un conjunto de “puntos” y ciertos subconjuntos llamados “líneas” que cumplen los siguientes axiomas:*

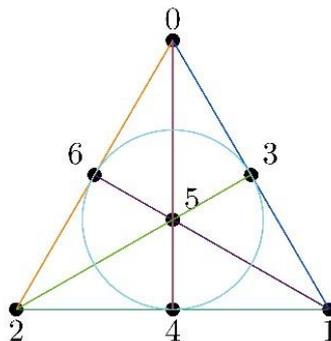
Ax.1 Existen al menos cuatro puntos, tales que ninguna terna de los mismos es incidente a la misma línea.

Ax.2 Existe al menos una línea que contiene exactamente $n + 1$ puntos.

Ax.3 Dados dos puntos distintos, existe una única línea que los contiene.

Ax.4 Dadas dos líneas distintas, existe al menos un punto común a ambas.

Ejemplo 2. *El plano proyectivo finito con el menor número posible de puntos se obtiene para $n = 2$, y es el conocido como plano de Fano (7 puntos y 7 líneas con 3 puntos en cada línea).*



Hemos coloreado cada una de las líneas con diferentes colores para distinguirlas, pero en realidad cada línea tiene solo tres puntos (a continuación, en cada columna indicamos los puntos que pertenecen a la línea correspondiente):

1	2	3	4	5	6	7
2	2	2	4	4	1	1
4	5	6	5	6	5	3
1	3	0	0	3	6	0

Una característica de los planos proyectivos es la dualidad que desempeñan los puntos y las líneas. En un plano proyectivo, una afirmación que contenga puntos, líneas y relaciones de incidencia entre ellos se puede dualizar, es decir, intercambiar puntos por líneas –y viceversa– y, con los ajustes gramaticales necesarios, la afirmación sigue siendo cierta. Esto es así porque los duales de los Axiomas 1–4 son resultados demostrables (teoremas), lo que permite dualizar la demostración de cualquier teorema para obtener una prueba válida del teorema dual. Enunciamos a continuación los duales de los Axiomas 1–4 cuyas demostraciones pueden encontrarse en Cederberg (2001).

Teorema 1 (Dual del Ax. 1). *Existen al menos cuatro líneas, tales que ninguna terna de las mismas son concurrentes en un punto.*

Teorema 2 (Dual del Ax. 2). *Existe al menos un punto que está contenido en exactamente $n + 1$ líneas.*

Teorema 3 (Dual del Ax. 3). *Dadas dos líneas distintas, tienen exactamente un punto en común entre ellas.*

Teorema 4 (Dual del Ax. 4). *Dados dos puntos distintos, existe al menos una línea que los contiene.*

A partir de estos resultados no es difícil obtener el número de líneas que pasan por un punto y el número de puntos que contiene cada línea.

Teorema 5. *En un plano proyectivo de orden n cada punto está exactamente en $n + 1$ líneas.*

Teorema 6 (Dual del teorema 5). *En un plano proyectivo de orden n , cada línea posee exactamente $n + 1$ puntos.*

Finalmente, deducimos un resultado interesante: el número de puntos y líneas presentes en un plano proyectivo de orden n .

Teorema 7. *Un plano proyectivo de orden n contiene exactamente $n^2 + n + 1$ puntos y $n^2 + n + 1$ líneas.*

Demostración. Sea P un punto del plano proyectivo de orden n . Otro punto del plano determina con P una única línea por el Ax. 3. Por el Teorema 5 hay exactamente $n + 1$ líneas que pasan por P y por el Teorema 6, cada una de esas líneas tiene exactamente $n + 1$ puntos, es decir n puntos además de P . En total el número de puntos es $n(n + 1) + 1 = n^2 + n + 1$. El principio de dualidad permite demostrar, con un argumento similar, que el número de líneas es $n^2 + n + 1$.

■

Como cada carta de *Dobble* contiene 8 símbolos, el Teorema 6 nos indica que debe modelarse

con un plano proyectivo de orden $n = 7$. El Teorema 7 nos dice, entonces, que debe contener $n^2 + n + 1 = 57$ cartas y 57 símbolos: como *Dobble* se comercializa solo con 55 cartas, resulta que “faltan” 2 cartas que pueden ser construidas sin añadir ningún símbolo nuevo y conservando la jugabilidad. Veremos, más adelante, cómo descubrir estas cartas perdidas para poder añadirles a la baraja y restaurar la simetría del juego.

Una cuestión natural sin resolver es la determinación de los órdenes n para los cuales existe algún plano proyectivo finito:

- Se sabe que, si n es la potencia de un primo, entonces existe un plano proyectivo de orden n : basta construir el plano proyectivo $\mathbb{P}_2(\mathbb{K})$ sobre el cuerpo finito $\mathbb{K} = GF(n)$ de n elementos (Ayres, 1971). Como es bien sabido, los “puntos” de $\mathbb{P}_2(\mathbb{K})$ son las rectas del \mathbb{K} -espacio vectorial tridimensional \mathbb{K}^3 que pasan por el origen (de las que excluimos el origen) y las “líneas” de $\mathbb{P}_2(\mathbb{K})$ son los planos de \mathbb{K}^3 pasando por el origen (de las que excluimos el origen).
- También existen planos que no derivan de cuerpos finitos, pero el orden de todos los encontrados hasta ahora es siempre la potencia de un primo. Por ejemplo, se sabe que hay cuatro planos proyectivos diferentes de orden 9, tres de ellos no desarguesianos (Cederberg, 2001).
- El único teorema general de no existencia de planos proyectivos es el conocido teorema de Bruck y Ryser (Bruck y Ryser, 1949).

Teorema 8. (Bruck y Ryser, 1949) Sean $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \equiv 1$ o $2 \pmod{4}$ y además n no es suma de dos cuadrados en \mathbb{Z} . Entonces no existe ningún plano proyectivo de orden n .

- Un corolario inmediato del teorema de Bruck y Ryser es la no existencia de planos proyectivos de orden 6. Este resultado está relacionado con el problema de los 36 oficiales de Euler que comentaremos en la Sección 5.
- El caso $n = 10$ no está cubierto por el teorema de Bruck y Ryser porque $10 \equiv 2 \pmod{4}$ pero $10 = 1^2 + 3^2$. Sin embargo, tras un prolongado e intenso programa de investigación, se ha demostrado que no existe ningún plano proyectivo de orden 10 (Fraleigh, 1994 y Lam, 1991).
- Nada se sabe sobre la existencia o no de planos proyectivos de orden n para valores de $n \neq 10$, que no sean potencia de un primo y que no cumplan las condiciones del teorema de Bruck y Ryser. El primer caso abierto es, por tanto, $n = 12$.

3. Conjuntos con diferencia perfecta y discos de Penrose

Es bien sabido cómo construir un plano proyectivo a partir de un plano afín completándolo con los puntos del “infinito” (Deléglise, 2013). Aquí, sin embargo, adoptaremos un enfoque menos conocido, pero que resulta más cómodo para representar planos proyectivos finitos y que será de gran utilidad a la hora de elaborar nuestros propios juegos.

Definición 3. Sea $S_n = \{a_1, a_2, \dots, a_{n+1}\}$ donde $n \geq 2, 0 \leq a_i \leq k - 1$ y $a_i \in \mathbb{Z}$ para $i = 1, \dots, n + 1$. Se dice que S_n un conjunto con diferencia perfecta de orden n (con respecto a k)

si, para todo $m \not\equiv 0 \pmod{k}$, existe un único par ordenado (a_i, a_j) tal que $a_i, a_j \in S_n$ y $a_i - a_j \equiv m \pmod{k}$.

Por ejemplo, $S_2 = \{0, 1, 3\}$ es un conjunto con diferencia perfecta de orden 2 (con respecto a 7) puesto que:

$$\begin{array}{lll} 1 \equiv 1 - 0 \pmod{7}, & 2 \equiv 3 - 1 \pmod{7}, & 3 \equiv 3 - 0 \pmod{7}, \\ 4 \equiv 0 - 3 \pmod{7}, & 5 \equiv 1 - 3 \pmod{7}, & 6 \equiv 0 - 1 \pmod{7}. \end{array}$$

Los conjuntos con diferencia perfecta de un orden dado no son únicos. Por ejemplo, $\{1, 2, 4\}$ también es un conjunto con diferencia perfecta de orden 2 (con respecto a 7). De hecho, todos los conjuntos $\{i, 1+i, 3+i\}$, donde $i = 1, \dots, 6$, con la suma módulo 7, son con diferencia perfecta de orden 2. Más aún, dos números tampoco determinan de manera única un conjunto con diferencia perfecta, como ponen de manifiesto los conjuntos $\{0, 1, 3\}$ y $\{0, 1, 5\}$ que son ambos con diferencia perfecta de orden 2 (con respecto a 7).

Teorema 9. Si S_n es un conjunto con diferencia perfecta de orden n (con respecto a k), entonces

$$k = n^2 + n + 1.$$

Demostración. En efecto, en un conjunto de $n + 1$ elementos se pueden formar $(n + 1) \cdot n$ pares ordenados. Como cada uno de esos pares debe generar un único elemento entre los restos módulo k , y puesto que todos los elementos de \mathbb{Z}_k excepto el 0 son generados de esta forma, obtenemos que $k = (n + 1) \cdot n + 1 = n^2 + n + 1$. ■

A la vista del Teorema 9, podemos omitir “(con respecto a k)” cuando definamos un conjunto con diferencia perfecta. La importancia de los conjuntos con diferencia perfecta es que, a partir de ellos, podemos construir los llamados *planos cíclicos*, que son planos proyectivos de orden n donde las “líneas” se expresan de una forma especialmente sencilla.

Definición 4. Sea $S_n = \{a_1, a_2, \dots, a_{n+1}\}$ un conjunto con diferencia perfecta de orden n . Entonces el conjunto

$$P = \{p_0, p_1, \dots, p_{n^2+n}\},$$

formado por $n^2 + n + 1$ puntos y cuyas líneas son

$$L_j = \{p_{a_1-j}, p_{a_2-j}, \dots, p_{a_{n+1}-j}\}, \text{ para } j \in \{0, 1, \dots, n^2 + n\},$$

donde todas las restas del tipo “ $a_i - j$ ” que aparecen en los subíndices son módulo $k = n^2 + n + 1$, se denomina **plano cíclico de orden n generado por S_n** .

Ejemplo 3. Sea $S_2 = \{0, 1, 3\}$ un conjunto con diferencia perfecta de orden 2. Si las letras i y j representan subíndices de los puntos y líneas, respectivamente, el plano cíclico asociado se ilustra en la siguiente tabla:

	j						
	0	1	2	3	4	5	6
i	0	6	5	4	3	2	1
	1	0	6	5	4	3	2
	3	2	1	0	6	5	4

Los subíndices de puntos sobre la línea L_j se leen verticalmente en la tabla (por ejemplo, L_2 contiene a p_5, p_6, p_1).

Es un ejercicio instructivo probar que todo plano cíclico es también un plano proyectivo (Singer, 1938).

Teorema 10. *Un plano cíclico de orden n es un plano proyectivo de orden n .*

Por tanto podemos utilizar la estructura aritmética de los conjuntos con diferencia perfecta para generar planos proyectivos de orden n . Podemos ver a continuación una lista de diversos conjuntos con diferencia perfecta.

n	Conjuntos con diferencia perfecta
2	{0,1,3}
3	{0,1,3,9}
4	{0,1,4,14,16}
5	{0,1,3,8,12,18}
7	{0,1,3,13,32,36,43,52}
8	{0,1,3,7,15,31,36,54,63}
9	{0,1,3,9,27,49,56,61,77,81}
11	{0,1,3,12,20,34,38,81,88,94,104,109}
13	{0,1,3,16,23,28,42,76,82,86,119,137,154,175}
16	{0,1,3,7,15,31,63,90,116,127,136,181,194,204,233,238,255}
17	{0,1,4,38,40,85,92,110,115,163,179,189,246,252,265,279,287,290}
19	{0,1,4,22,47,61,81,111,116,147,149,160,189,201,252,284,310,358,366,375}
23	{0,1,3,17,36,42,64,93,131,149,161,193,204,214,219,227,264,273,313,400,448,452,472,479}

Con respecto a la omisión en la tabla de conjuntos con diferencia de orden $n = 6, 10, 12, 14, 15, 18, 20, 21$ y $18, 20, 21$ y 22 , se explica porque se ha demostrado que no existen conjuntos con diferencia perfecta de esos órdenes. De hecho, para $n < 2.000.000$, la existencia de un conjunto con diferencia perfecta de orden n implica que n es potencia de un primo (Gordon, 1994). Además, siempre que n sea potencia de un primo puede construirse un conjunto con diferencia perfecta de orden n (Sengupta, 2016). También debe señalarse que no todo plano proyectivo finito puede ser representado a través de conjuntos con diferencia perfecta.

Las líneas del plano cíclico generado por un conjunto con diferencia perfecta de orden n pueden obtenerse mediante un sencillo mecanismo en forma de disco ideado por Roger Penrose, físico matemático inglés –flamante premio Nobel de Física en 2020– y famoso por sus contribuciones a la teoría de la relatividad general, la cosmología, las teselaciones de cuasicristales, la matemática recreativa y la divulgación científica. Es muy conocida su escalera sin fin o escalera imposible, ideada en colaboración con su padre, que aparece en varios grabados del gran artista holandés M. C. Escher o en escenas de películas como *Los Vengadores (1998)* y *Origen (2010)*. También desarrolló la teoría de los *twistores*, que vuelve a estar de actualidad, pero entre todas sus magníficas aportaciones nos interesa ahora el modesto diseño de unos círculos que, basándose en los planos cíclicos que hemos visto, nos permitirán construir un plano proyectivo de orden n (Penrose, 2006):

- Tomemos un círculo de un material apropiado como cartulina o metacrilato y hagámosle un agujero en el centro que nos permita unirlo a otro círculo un poco más grande y al mismo tiempo girar sobre él.
- Marquemos en la circunferencia del borde del círculo grande (disco base), una serie de $n^2 + n + 1$ puntos igualmente espaciados, etiquetándolos en sentido contrario a las agujas del reloj, mediante los números $0, 1, \dots, n^2 + n$.
- En el círculo más pequeño (disco rotatorio) marcaremos con flechas $n + 1$ puntos cuidadosamente escogidos, que serán los indicados por un conjunto con diferencias perfectas de orden n .
- Las líneas del plano cíclico de orden n se obtienen girando, una unidad de cada vez, el disco rotatorio sobre el disco base y anotando las posiciones que marquen las flechas en el disco base.

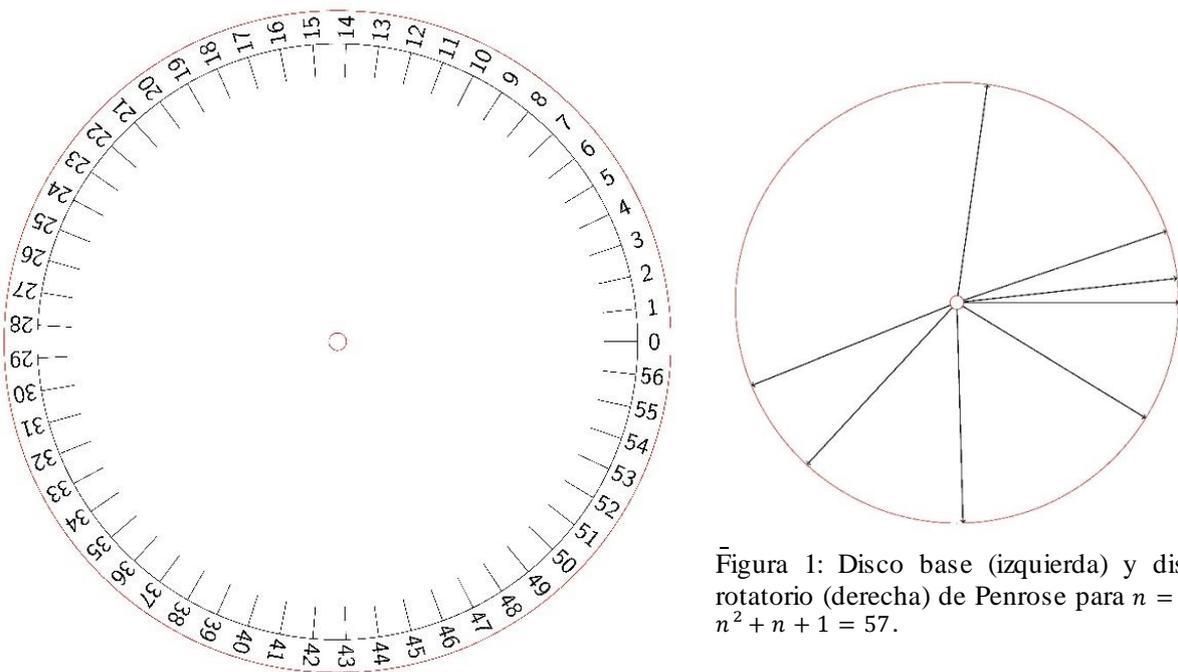


Figura 1: Disco base (izquierda) y disco rotatorio (derecha) de Penrose para $n = 7$ y $n^2 + n + 1 = 57$.

4. Completando *Dobble* y creando nuevos juegos

A continuación, describimos el procedimiento para descubrir las cartas que faltan en el juego *Dobble* comercializado por *Asmodee*, a la luz de la estructura matemática que hemos expuesto:

- Cogemos, al azar, una carta y consideramos el conjunto con diferencia perfecta $\{0, 1, 3, 13, 32, 36, 43, 52\}$ asociado al plano cíclico de orden 7. En nuestro ensayo, la carta que cogimos la determinamos por las figuras Candado (punto 0) y Árbol (punto 1), dado que dos figuras de ésta (¡dos puntos de una recta!) bastan, y a las restantes figuras les asignamos puntos del mencionado conjunto: Manzana (punto 3), Mano con ojo (punto 13), Bomba (punto 32), Gato (punto 36), Telaraña (punto 43) y Muñeco de nieve (punto 52). Ya observamos que los conjuntos $\{0 + i, 1 + i, 3 + i, 13 + i, 32 + i, 36 + i, 43 + i, 52 + i\}$, para $i = 0, 1, 2, \dots, 56$, son, también, conjuntos con

diferencia perfecta, así que para continuar utilizamos el Disco de Penrose girando las agujas en cada paso una unidad hacia la izquierda.

- Para el siguiente paso, $i = 1$, tendremos el conjunto $\{1, 2, 4, 14, 33, 37, 44, 53\}$ y cogeremos otra carta con la única condición que contenga la figura Árbol (punto 1). En nuestro ensayo, seleccionamos una carta que también contenía a la Margarita, a la que asignamos el punto 2, y completamos: Copo de nieve (punto 4), Delfín (punto 14), Zanahoria (punto 33), Gota de agua (punto 37), Perro (punto 44) y Gafas (punto 53).
- Para $i = 2$, se considera el conjunto $\{2, 3, 4, 14, 33, 37, 44, 53\}$ y cogeremos la carta determinada por las figuras Margarita (punto 2) y Manzana (punto 3). De esta forma vamos asignando puntos a figuras de las cartas que vamos seleccionando, cuidando de no repetir figuras que ya tienen asignación. Continuamos el proceso.
- Cuando llegamos al paso $i = 16$, cuyo conjunto con diferencia perfecta corresponde a $\{16, 17, 19, 29, 48, 52, 2, 11\}$, nos encontramos con que el juego no contiene la carta con la Hoja de arce (punto 16) y el Cubito de hielo (punto 17). El resto de figuras de esa carta faltante, en este paso, ya tiene asignación, excepto la del punto 29.
- A estas alturas, sólo quedaban por asignar los puntos 29, 30 y 31. Nótese que, si el juego contuviera todas las cartas según la estructura matemática expuesta, se requeriría llegar al menos hasta el paso $i = 18$ para completar las asignaciones, ya que la máxima diferencia entre dos elementos consecutivos de los conjuntos con diferencia perfecta es 19 y en cada paso desplazamos una unidad las agujas del Disco de Penrose.
- Con los pasos $i = 17$ e $i = 18$, descubrimos las figuras correspondientes a los puntos 30 (Caballo) y 31 (Ancla). Queda, entonces, por descubrir la figura correspondiente al punto 29, que lo haremos mirando otro conjunto con diferencia perfecta que contenga al punto 29, por ejemplo, $\{28, 29, 31, 41, 3, 7, 14, 23\}$ para $i = 28$, resultando el Dinosaurio, completando, de esta manera, todas las correspondencias entre puntos y figuras.
- Finalmente, comprobamos las siguientes cartas según la correspondencia obtenida y en el paso $i = 49$ nos encontramos con que falta la carta $\{49, 50, 52, 5, 24, 28, 35, 44\}$.

El resultado obtenido se presenta en la siguiente tabla en la que hemos escrito el nombre de las figuras que aparecen en las cartas del *Dobble* clásico, asignándoles un número entre 0 y 56 según el procedimiento anterior.

NOMBRE FIGURA	PUNTO ASIGNADO	NOMBRE FIGURA	PUNTO ASIGNADO	NOMBRE FIGURA	PUNTO ASIGNADO
Candado	0	Gingerman	19	Dirección prohibida	38
Árbol	1	Splash yellow	20	Iglú	39
Margarita	2	Vela	21	Fuego	40
Manzana	3	Lápiz	22	Pollito	41
Copo de nieve	4	Tortuga	23	Coche	42
Martillo	5	Bombilla	24	Telaraña	43
Luna	6	Queso	25	Perro	44
Fantasma	7	Corazón	26	Dragón	45
Punto de mira	8	Payaso	27	Tijera	46
Reloj	9	Mariquita	28	Rayo	47
Cebra	10	Dinosaurio	29	Cactus	48
Interrogación	11	Caballo	30	Ojo	49
Labios	12	Ancla	31	Calavera	50
Mano con ojo	13	Bomba	32	Clave de Sol	51
Delfín	14	Zanahoria	33	Muñeco de nieve	52
Ying-Yang	15	Biberón	34	Gafas	53
Hoja de arce	16	Exclamación	35	Trébol	54
Cubito de hielo	17	Gato	36	Araña	55
Bacteria verde	18	Gota de agua	37	Llave	56

Hemos, por tanto, localizado las dos cartas que le faltan al juego *Dobble*:



Figura 3: Carta faltante ($i = 16$).

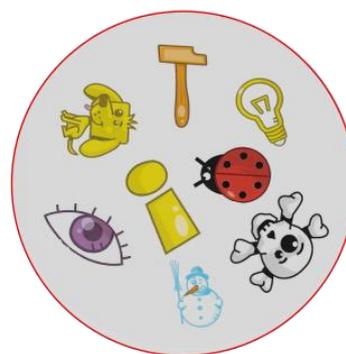


Figura 2: Carta faltante ($i = 49$).

Llegados a este punto en que somos capaces de generar juegos de *Dobble* con $n^2 + n + 1$ cartas, siendo n la potencia de un primo, pasamos a describir algunos ejemplos de nuevos juegos que hemos creado en nuestro proyecto STEMBach:

- Para $n = 2$, tenemos que $n^2 + n + 1 = 7$, por lo que pensamos en un juego con las siete notas musicales y los colores del arcoíris. En cada carta tendremos $n + 1 = 3$ notas. Es el juego más sencillo y especialmente apto para niños pequeños.

- Para $n = 3$, tendríamos un juego con $n^2 + n + 1 = 13$ cartas y 4 figuras en cada carta. Sigue siendo un juego muy fácil, por eso elegimos motivos de animales y nos aparece apropiado para niños pequeños.
- Con $n = 4$, resulta un juego de $n^2 + n + 1 = 21$ cartas y en cada carta 5 figuras. Hemos elegido figuras de comida y bebida para ese juego.
- Diciembre es el mes de la Navidad y es el mes de los juguetes por excelencia. Con $n = 5$, rellenamos las $n^2 + n + 1 = 31$ cartas de un juego con 6 motivos navideños por carta. Este es el mismo formato que el *Dobble Infantil*⁶, aunque con distintos símbolos.
- Para $n = 7$, podemos hacer juegos con la estructura del *Dobble* clásico con $n^2 + n + 1 = 57$ cartas y 8 figuras por carta. Nosotros nos hemos decantado por un juego hecho con banderas que puede considerarse educativo.
- El año 2019 fue declarado, por las Naciones Unidas, año internacional de la tabla periódica, al cumplirse 150 años de la versión que Mendeléyev creó de la misma. Para celebrarlo, construimos un juego *Dobble* para $n = 8$ con $n^2 + n + 1 = 73$ cartas y 9 símbolos de elementos químicos por carta.



5. Otras conexiones sorprendentes

En las Matemáticas, frecuentemente nos encontramos con una variedad asombrosa de

conexiones inesperadas. Por ejemplo hemos visto la relación entre planos proyectivos y conjuntos con diferencia perfecta, pero los planos proyectivos también están relacionados con los cuadrados grecolatinos: un *cuadrado grecolatino* de orden n es una matriz $n \times n$ con entradas del conjunto $\{1, 2, \dots\}$ tales que cada elemento de $\{1, 2, \dots, n\}$ aparece en cada fila y cada columna de la matriz exactamente una vez. Se dice que dos cuadrados grecolatinos $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ de orden n son *ortogonales* si los n^2 pares ordenados (a_{ij}, b_{ij}) son distintos. Es fácil comprobar que las tres matrices siguientes son cuadrados grecolatinos ortogonales por pares:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Resulta que la existencia de este trío de cuadrados grecolatinos ortogonales por pares de tamaño 4 es equivalente a la existencia de un plano proyectivo finito de orden 4; más aún, esto es cierto en general (Roberts y Tesman, 2005):

Teorema 11. *Sea $n > 1$ un número entero. Entonces existe un plano proyectivo finito de orden n si y sólo si existe un conjunto de $n - 1$ cuadrados grecolatinos de tamaño n que son ortogonales por pares.*

Según lo visto para planos proyectivos, si n es una potencia de un primo, entonces existe un conjunto de $n - 1$ cuadrados grecolatinos de tamaño n que son ortogonales por pares. Por ejemplo, al plano proyectivo de orden 2 le corresponde un conjunto de 1 cuadrado grecolatino de tamaño 2, precisamente

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

¿Qué sucede en el caso de orden 6? La cuestión de la existencia de cuadrados grecolatinos se remonta a Leonhard Euler quien en 1782 planteó el célebre Problema de los 36 oficiales. Se trata de saber si 36 oficiales, de 6 grados diferentes y de 6 cuarteles diferentes pueden disponerse en un cuadrado de 6 filas por 6 columnas de manera tal que cada grado y cada cuartel este representado por un oficial, en cada fila y en cada columna. Es claro que, si disponemos de dos cuadrados latinos de orden 6 ortogonales, sabremos cómo lograr esa disposición. Entonces Euler intentó construir un par de tamaño 6; al no lograrlo, conjeturó la imposibilidad de responder afirmativamente este problema. En su estudio sobre los cuadrados grecolatinos, mostró cómo construir un par de tamaño n , si $n \neq 4k + 2$, y vio de inmediato que es imposible construir un par de cuadrados grecolatinos ortogonales de tamaño 2, lo que lo impulsó a proponer la siguiente conjetura:

Conjetura. (Euler, 1782). *Para cada entero no negativo k , no existe ningún par de cuadrados grecolatinos ortogonales de tamaño $n = 4k + 2$.*

En 1900, G. Tarry demostró que Euler tenía razón sobre el caso $n = 6$. Pero Bose, Shrikhande y Parker en 1960, demostraron que estaba espectacularmente equivocado para todos los demás valores de la forma $4k + 2$ mayores que 6: existe un par de cuadrados grecolatinos ortogonales de orden n para todo $n > 6$ (Dembowski, 1968). Nótese que se sigue del resultado de Tarry sobre el problema de los 36 oficiales, que no existen planos

proyectivos de orden 6, resultado que, como hemos visto, se sigue también del Teorema de Bruck y Ryser.

Otra aplicación sorprendente de los conjuntos con diferencia perfecta o planos cíclicos aparece en la música (Fauvel, Flood, y Wilson, 2006). Aunque la mayoría de las composiciones musicales se realizan en un sistema de escala temperada (o escala de igual temperamento) basado en 12 semitonos iguales, también se le ha prestado atención a otros sistemas obtenidos al dividir la octava en distinto número de notas. En especial, son de interés los sistemas microtonales basados en k tonos iguales, donde k es un número de la forma $n^2 + n + 1$, para algún entero n , como, por ejemplo, los sistemas de 7 tonos ($n = 2$) o de 31 tonos ($n = 5$), entre otros, donde se emplean los planos cíclicos para generarlos.

Agradecimientos

Queremos dar las gracias a Miguel Mirás Calvo, del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Vigo, por sus amables sugerencias y por habernos animado a redactar este artículo.

Referencias bibliográficas

- AIGNER, M. y ZIEGLER, G. (2018), *Proofs from the Book*, 6th Edition, Springer.
- AYRES, F. (1971), *Geometría Proyectiva*, McGraw-Hill.
- BOURRIGAN, M. (2011), *Dobble et la géométrie finie*, en Image des Mathématiques du CNRS.
- BRUCK, R. H. y RYSER, H. J. (1949), *The Nonexistence of Certain Finite Projective Planes*, Canadian Journal of Mathematics 1, 88–93.
- CEDERBERG, J. N. (2001), *A Course in Modern Geometries*, Springer.
- DEMBOWSKI, P. (1968), *Finite Geometries*, Springer-Verlag.
- DELÉGLISE, M. (2013), *Plans projectifs, arithmétique modulaire et Dobble*, <<http://math-univ-lyon1.fr/~deleglis/PDF/dobble.pdf>>
- FAUVEL, J., FLOOD, R. y WILSON, R. (2006), *Music and Mathematics. From Pythagoras to Fractals*, Oxford University Press.
- FRALEIGH, J. B. (1994), *A First Course in Abstract Algebra*, Addison-Wesley.
- GORDON, D. M. (1994), *The prime power conjecture is true for $n < 2,000,000$* , The Electronic Journal of Combinatorics. Disponible en <https://www.emis.de/journals/EJC/Volume_1/PDF/v1i1r6.pdf>
- HSU, C., OSTROFF, J. Y VAN METER, L. (2020), *Projectivizing Set*, Math Horizons, 27, 12–15.
- LAM, C. W. H. (1991), *The Search for a Finite Projective Plane of Order 10*, The

American Mathematical Monthly, 98, 305–318.

PENROSE, R. (2006), *El camino a la realidad: Una guía completa a las leyes del universo*, Editorial Debate.

POLSTER, B. (2015), *The Intersection Game*, Math Horizons, 22, 8–11.

PUZZLEWOCKY, *Finite Projective Planes and the Math of Spot It!*

<<https://puzzlewocky.com/games/the-math-of-spot-it/>>, accessed on 2020.

ROBERTS, F.S. y TESMAN, B. (2005), *Applied Combinatorics*, Pearson/Prentice Hall.

SENGUPTA, D. (2016), *A Mathematical Analysis of Spot It!*

<<https://www.mathteacherscircle.org/assets/legacy/resources/materials/SenguptaSpotIt.pdf>>

SINGER, J. (1938), *A Theorem in Finite Projective Geometry and Some Applications to Number Theory*, Transactions of the American Mathematical Society, 43, 377–385.

¹ Este artículo está basado en el trabajo desarrollado por Iria González Álvarez-Ron y Samuel Civeira Corral, bajo la dirección de los profesores José Ángel Cid y Carlos Ferreiro, dentro del programa STEMBach cursado en el IES Blanco Amor de Ourense durante el bienio 2018–2020.

² En realidad a lo largo de este artículo descubriremos que en el juego *Dobble* “faltan” dos cartas –de ahí la pérdida de simetría entre las 55 cartas y los 57 símbolos– y veremos también como identificarlas para poder completar el juego.

³ De nuevo esta afirmación solo es cierta cuando añadimos a *Dobble* las dos cartas que faltan. Restaurar esta simetría perdida es, por tanto, un acto de justicia y belleza matemática.

⁴ En numerosas ocasiones se reserva el término *álgebra de división* para estas estructuras, ya que es habitual exigir la conmutatividad del producto entre las propiedades que definen un cuerpo.

⁵ En efecto, $f(x)$ es irreducible sobre \mathbb{Z}_2 ya que $f(0) = f(1) = 1 \neq 0$ y al no tener raíces simples no es factorizable. Obsérvese que $x^2 + 1$ no sería una elección válida puesto que se factoriza sobre \mathbb{Z}_2 como $x^2 + 1 = (x + 1)(x + 1)$.

⁶ En el *Dobble Infantil* falta sólo una carta, pues se comercializa con 30 cartas y 31 figuras.