

# El teorema de Borsuk-Ulam

José Ángel Cid

Diario Jaén, 8 de Abril de 2010



**EL RINCÓN MATEMÁTICO**

## El Teorema de Borsuk-Ulam

**José Ángel Cid Araujo**  
Departamento de Matemáticas de la Universidad de Jaén

En "La vuelta al mundo en ochenta días" el protagonista Phileas Fogg descubre sorprendido en el último momento que ha regresado a Londres un día antes de lo que pensaba, ganando de esta forma la apuesta que le había llevado a dar la vuelta al mundo. Un desfase como el relatado por Julio Verne se produce si viajamos siempre en dirección este, y por tanto aumentando una hora en nuestro reloj al atravesar cada huso horario, pero olvidamos descontar un día al cruzar la línea internacional de cambio de fecha situada en el meridiano 180 grados (o antimeridiano de Greenwich). La presencia de esta línea resulta bastante incómoda y por eso se ha colocado en mitad del Pacífico, donde afecta a la menor población posible. Vamos a explicar porqué la existencia de esta línea no puede ser evitada.

Desde un punto de vista matemático asignar una hora a cada longitud de la superficie terrestre es una función de la circunferencia (el ecuador) en la recta real (el tiempo). Además queremos asignar horas distintas a diferentes longitudes y sería también deseable que la asignación fuese continua (que a longitudes cercanas le correspondiesen horas próximas). Sin embargo no es posible cumplir todos estos requisitos puesto que un célebre resultado de topología, el teorema de Borsuk-Ulam, afirma que toda función continua de la circunferencia en la recta asigna necesariamente el mismo valor a un par de puntos antipodales. Por tanto, si queremos asignar horas distintas a diferentes longitudes, no nos queda más remedio que introducir una discontinuidad (la línea de cambio de fecha).

El teorema de Borsuk-Ulam fue conjeturado por el matemático polaco S. Ulam (uno de los científicos que participó en la construcción de la bomba atómica en Los Alamos) y demostrado por su compatriota K. Borsuk. El teorema es válido también en dimensión mayor que uno y sus aplicaciones son muy variadas. Por ejemplo, nos permite afirmar que en cada instante existen dos puntos antipodales sobre la superficie terrestre que tienen la misma temperatura y presión atmosférica. Otra aplicación sorprendente (que algunos atribuyen a McDonald) nos dice que un sándwich mixto, relleno de jamón y queso de manera irregular, siempre puede dividirse con un solo corte de forma que la cantidad de pan, queso y jamón en cada trozo sea exactamente la misma.

En "La vuelta al mundo en ochenta días" el protagonista Phileas Fogg descubre sorprendido en el último momento que ha regresado a Londres un día antes de lo que pensaba, ganando de esta forma la apuesta que le había llevado a dar la vuelta al mundo. Un desfase como el relatado por Julio Verne se produce si viajamos siempre en dirección este, y por tanto aumentando una hora en nuestro reloj al atravesar cada huso horario, pero olvidamos descontar un día al cruzar la línea internacional de cambio de fecha situada en el meridiano  $180^\circ$  (o antimeridiano de Greenwich). La presencia de esta línea resulta bastante incómoda y por eso se ha colocado en mitad del Pacífico, donde afecta a la menor población posible. Vamos a explicar porqué la existencia de esta línea no puede ser evitada.

Desde un punto de vista matemático asignar una hora a cada longitud de la superficie terrestre es una función de la circunferencia (el ecuador) en la recta real (el tiempo). Además queremos asignar horas distintas a diferentes longitudes y sería también deseable que la asignación fuese continua (i.e., que a longitudes cercanas le correspondiesen horas próximas). Sin embargo no es posible cumplir todos estos requisitos puesto que un célebre resultado

de topología, el teorema de Borsuk-Ulam, afirma que toda función continua de la circunferencia en la recta asigna necesariamente el mismo valor a un par de puntos antipodales. Por tanto, si queremos asignar horas distintas a diferentes longitudes, no nos queda más remedio que introducir una discontinuidad (la línea de cambio de fecha).

El teorema de Borsuk-Ulam fue conjeturado por el matemático polaco S. Ulam (uno de los científicos que participó en la construcción de la bomba atómica en Los Álamos) y demostrado por su compatriota K. Borsuk. El teorema es válido también en dimensión mayor que uno y sus aplicaciones son muy variadas. Por ejemplo, nos permite afirmar que en cada instante existen dos puntos antipodales sobre la superficie terrestre que tienen la misma temperatura y presión atmosférica. Otra aplicación sorprendente (que algunos atribuyen a McDonald) nos dice que un sándwich mixto, relleno de jamón y queso de manera irregular, siempre puede dividirse con un solo corte de forma que la cantidad de pan, queso y jamón en cada trozo sea exactamente la misma.

Para saber más:

- *Línea internacional de cambio de fecha*, Wikipedia.
- F. E. Su, *Mudd Math Fun Facts*, <<http://www.math.hmc.edu/funfacts/>>.
  - “Why an International Date Line?”
  - “Ham Sandwich Theorem”
  - “Borsuk-Ulam Theorem”
- E. Zeidler, *Nonlinear Functional Analysis and its Applications. I Fixed-Point Theorems*, Springer, 1986. En la sección 16.5 (página 708) puede verse la demostración del teorema de Borsuk-Ulam así como algunas aplicaciones del mismo. La demostración del teorema del sándwich (proposición 16.16) es el problema 16.1. En la página 710 se atribuye este teorema a (¿Ronald?) McDonald.
- S. Ulam, *Aventuras de un matemático*, Nivola, (2002).
- J. Matoušek, *Using the Borsuk-Ulam Theorem*, Springer-Verlag, (2003).