

La danza celeste

José Ángel Cid

Diario Jaén, 4 de febrero de 2010

EL RINCÓN MATEMÁTICO

La danza celeste



José Ángel Cid
Departamento de Matemáticas de la UJA.



En la película *Ágora* el director Alejandro Amenábar muestra a Hypatia descubriendo que la órbita terrestre es elíptica. No sabemos si este dato es cierto, pero el reconocimiento oficial por tal descubrimiento le corresponde a Kepler, quién doce siglos después de Hypatia enunció sus famosas tres leyes: 1) los planetas se mueven en una elipse estando el Sol en uno de sus focos, 2) cada planeta barre áreas iguales en tiempos iguales, 3) la duración del año en cada planeta es proporcional al semieje mayor de la elipse que recorre elevado a la potencia $3/2$.

Una de las grandes proezas intelectuales de Newton fue proponer un modelo matemático para el movimiento de los planetas, a partir del cual se deducen de forma matemática las tres leyes que Kepler había establecido experimentalmente: suponiendo que existen solamente dos cuerpos (el Sol y un planeta cuya masa es minúscula comparada con la del Sol), de la ley de la gravitación universal y de la segunda ley de Newton, se sigue que el movimiento del planeta es solución de la ecuación diferencial

$$x''(t) = -k \frac{x(t)}{|x(t)|^3}, \quad x(t) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}, \quad (*)$$

donde $k > 0$ es una constante que solo depende de la masa del Sol, $x(t)$ es la posición del planeta en el instante de tiempo t , $x'(t)$ es su segunda derivada (es decir, su aceleración) y $|x(t)|$ su distancia al Sol (que suponemos fijo en el origen de coordenadas). Se demuestra que el movimiento sobre una elipse con el Sol en uno de los focos es la única solución periódica de (*) y que además también se cumplen las otras dos leyes de Kepler. Menos conocido es que existen otras posibles soluciones de (*) que se mueven sobre parábolas, hipérbolas o semirrectas, pudiendo alejarse indefinidamente del Sol o incluso acercarse hasta llegar a colisionar con él.

Sin embargo en el momento en que se considera la interacción gravitatoria entre 3 cuerpos (como en el sistema formado por el Sol, la Tierra y la Luna) la ecuación (*) se complica sobremanera y muchas preguntas que se plantean continúan sin respuesta. Este es el famoso problema de los tres cuerpos (o en general de los N cuerpos si consideramos la interacción gravitatoria entre cualquier número finito de objetos) y que subyace en la trama de la novela de intriga "La incógnita Newton" de Catherine Shaw. Una solución periódica del problema de los N cuerpos se denomina "coreografía", nombre que sugiere la danza de los planetas al son de la música celeste. El lector interesado podrá disfrutar de algunas de estas maravillosas coreografías en la página web <http://www.matapp.unimib.it/~susster/files/index.html>.

En la película *Ágora* el director Alejandro Amenábar muestra a Hypatia descubriendo que la órbita terrestre es elíptica. No sabemos si este dato es cierto, pero el reconocimiento oficial por tal descubrimiento le corresponde a Kepler, quién doce siglos después de Hypatia enunció sus famosas tres leyes: 1^a) los planetas se mueven en una elipse estando el Sol en uno de sus focos, 2^a) cada planeta barre áreas iguales en tiempos iguales, 3^a) la duración del año en cada planeta es proporcional al semieje mayor de la elipse que recorre elevado a la potencia $3/2$.

Una de las grandes proezas intelectuales de Newton fue proponer un modelo matemático para el movimiento de los planetas, a partir del cual se deducen de forma matemática las tres leyes que Kepler había establecido experimentalmente: suponiendo que existen solamente dos cuerpos (el Sol y un planeta cuya masa es minúscula comparada con la del Sol), de la ley de la gravitación universal y de la segunda ley de Newton, se sigue que el movimiento del planeta es solución de la ecuación diferencial

$$x''(t) = -k \frac{x(t)}{|x(t)|^3}, \quad x(t) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}, \quad (*)$$

donde $k > 0$ es una constante que solo depende de la masa del Sol, $x(t)$ es la posición del planeta en el instante de tiempo t , $x''(t)$ es su segunda derivada (es decir, su aceleración) y $|x(t)|$ su distancia al Sol (que suponemos fijo en el origen de coordenadas). Se demuestra que el movimiento sobre una elipse con el Sol en uno de los focos es la única solución periódica de (*) y que además también se cumplen las otras dos leyes de Kepler. Menos conocido es que existen otras posibles soluciones de (*) que se mueven sobre parábolas, hipérbolas o semirrectas, pudiendo alejarse indefinidamente del Sol o incluso acercarse hasta llegar a colisionar con él.

Sin embargo en el momento en que se considera la interacción gravitatoria entre 3 cuerpos (como en el sistema formado por el Sol, la Tierra y la Luna) la ecuación (*) se complica sobremanera y muchas preguntas que se plantean continúan sin respuesta. Éste es el famoso problema de los tres cuerpos (o en general de los N cuerpos si consideramos la interacción gravitatoria entre cualquier número finito de objetos) y que subyace en la trama de la novela de intriga “La incógnita Newton” de Catherine Shaw. Una solución periódica del problema de los N cuerpos se denomina “coreografía”, nombre que sugiere la danza de los planetas al son de la música celeste. El lector interesado podrá disfrutar de algunas de estas maravillosas coreografías en la página web

<http://www.matapp.unimib.it/~suster/files/index.html>

Para saber más:

- R. Ortega y A. Ureña, *Apuntes de Mecánica Celeste*, Universidad de Granada.
- S. Terracini, (en colaboración con D. Ferrario y V. Barutello), *Il problema degli N -corpi e le sue orbite periodiche*. Ésta es la página web recomendada en el artículo donde pueden verse estupendas animaciones de algunas coreografías.
- J. Moser, *Is the Solar System Stable?*, The Mathematical Intelligencer 1 (1978), 65-71.
- C. Shaw, *La incógnita Newton*, Rocaeditorial, (2005).