Grado topológico y ecuaciones diferenciales

Santiago de Compostela. 18 de Febrero de 2010

José Ángel Cid

Departamento de Matemáticas
Universidad de Jaén

Dada $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua con $F(t + 2\pi, x) = F(t, x)$, ¿tiene la ecuación $x' = F(t, x)$ alguna solución 2π-periódica?

Dada $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua con $F(t + 2\pi, x) = F(t, x)$, ¿tiene la ecuación $x' = F(t, x)$ alguna solución 2π-periódica?

Este problema es equivalente a la existencia de una solución para el problema de frontera

$$\begin{cases} x' = F(t, x), & \text{para todo } t \in [0, 2\pi] \\ x(0) = x(2\pi), \end{cases} \tag{1}$$

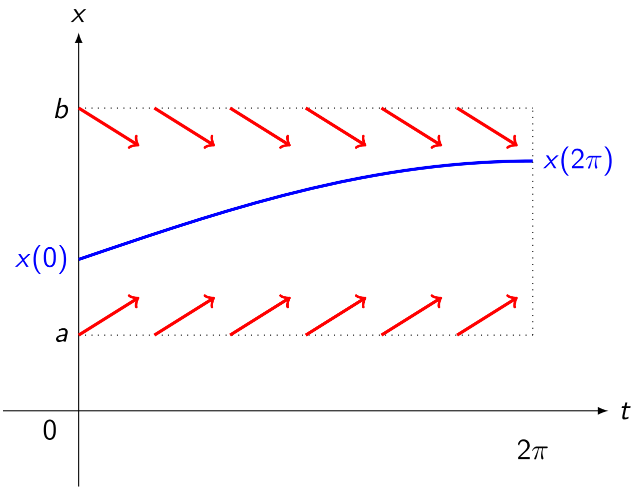
TEOREMA

Supongamos que $F : [0, 2\pi] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *y* $\frac{\partial F}{\partial x} : [0, 2\pi] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *son continuas.*
Si existen constantes $a < b$ *tales que*

$$F(t, a) > 0 \quad y \quad F(t, b) < 0,$$

entonces existe una solución del problema (1).

Demostración.



Para cada $y \in [a, b]$, sea $\varphi(t, y)$ la solución de

$$\begin{cases} x' = F(t, x), \quad \text{para todo } t \in [0, 2\pi] \\ x(0) = y. \end{cases} \tag{2}$$

Para cada $y \in [a, b]$, sea $\varphi(t, y)$ la solución de

$$\begin{cases} x' = F(t, x), & \text{para todo } t \in [0, 2\pi] \\ x(0) = y. \end{cases} \tag{2}$$

Definimos la función continua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$

$$f(y) = \varphi(2\pi, y) - \varphi(0, y).$$

Para cada $y \in [a, b]$, sea $\varphi(t, y)$ la solución de

$$\begin{cases} x' = F(t, x), & \text{para todo } t \in [0, 2\pi] \\ x(0) = y. \end{cases} \tag{2}$$

Definimos la función continua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$

$$f(y) = \varphi(2\pi, y) - \varphi(0, y).$$

Además

$$f(a) = \varphi(2\pi, a) - a > 0 \quad \text{y} \quad f(b) = \varphi(2\pi, b) - b < 0.$$

Para cada $y \in [a, b]$, sea $\varphi(t, y)$ la solución de

$$\begin{cases} x' = F(t, x), & \text{para todo } t \in [0, 2\pi] \\ x(0) = y. \end{cases} \tag{2}$$

Definimos la función continua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$

$$f(y) = \varphi(2\pi, y) - \varphi(0, y).$$

Además

$$f(a) = \varphi(2\pi, a) - a > 0 \quad \text{y} \quad f(b) = \varphi(2\pi, b) - b < 0.$$

Entonces el Teorema de Bolzano implica que existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$ y por tanto existe una solución de (1) con $x(0) = c$.$\square$

Como el ejemplo anterior pone de manifiesto, muchos problemas en Análisis se reducen a resolver una ecuación de la forma

$$f(x) = \mathbf{0}.$$

Como el ejemplo anterior pone de manifiesto, muchos problemas en Análisis se reducen a resolver una ecuación de la forma

$$f(x) = \mathbf{0}.$$

¿Cómo podemos probar la existencia de ceros para una función definida en un espacio de dimensión finita mayor que uno?, ¿y si el espacio es de dimensión infinita?

El grado topológico es la herramienta más útil y potente que se conoce para responder a estas preguntas. Desde el punto de vista de un analista el grado topológico es un "contador algebraico" del número de soluciones de la ecuación

$$f(x) = 0.$$

El grado topológico es la herramienta más útil y potente que se conoce para responder a estas preguntas. Desde el punto de vista de un analista el grado topológico es un “contador algebraico” del número de soluciones de la ecuación

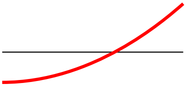
$$f(x) = 0.$$

Para que sea útil en las aplicaciones el grado de una función ha de ser invariante con respecto a pequeñas perturbaciones. La familia

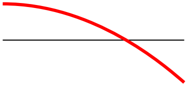
$$f_\varepsilon(x) = x^2 + \varepsilon,$$

pone de manifiesto que el número de soluciones de una ecuación es una cantidad que en general no se conserva.

La clave consiste en añadir a cada cero de f un signo positivo o negativo (así el grado es un número entero, por eso decimos que es un “contador algebraico” del número de ceros).

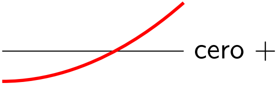


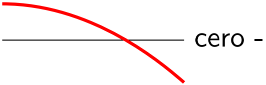
cero $+$



cero -

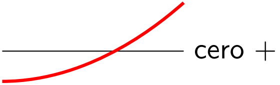
La clave consiste en añadir a cada cero de f un signo positivo o negativo (así el grado es un número entero, por eso decimos que es un "contador algebraico" del número de ceros).

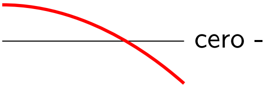




Si $f \in C^1[a,b]$, $f(x) \neq 0$ para $x = a, b$ y todos los ceros de f son simples (i.e., $f(x) = 0 \Rightarrow f'(x) \neq 0$) entonces f tiene un número finito de ceros $x_1, x_2, \ldots, x_n$ y se define

La clave consiste en añadir a cada cero de f un signo positivo o negativo (así el grado es un número entero, por eso decimos que es un "contador algebraico" del número de ceros).





Si $f \in C^1[a,b]$, $f(x) \neq 0$ para $x = a, b$ y todos los ceros de f son simples (i.e., $f(x) = 0 \Rightarrow f'(x) \neq 0$) entonces f tiene un número finito de ceros $x_1, x_2, \ldots, x_n$ y se define

$$deg(f,(a,b)) = \sum_{i=1}^{n} sign\, f'(x_i). \tag{3}$$

A lo largo de esta sección supondremos siempre que $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ es un conjunto abierto y acotado y que $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^m$ es una función continua que no se anula en la frontera, es decir,

$$f(x) \neq \mathbf{0} \quad \text{para todo } x \in \partial\Omega.$$

Vamos a definir el número entero $deg(f, \Omega)$ (el grado de f relativo a Ω) en varias etapas.

Etapa 1. $f \in C^1(\Omega)$ y todos sus ceros son simples.

De forma análoga a las funciones de una variable decimos que $x \in \Omega$ es un cero simple si $f(x) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^m$ y $det(f'(x)) \neq 0$, donde $f'(x) \in \mathcal{M}_{m\times m}(\mathbb{R})$ es la matriz jacobiana de la aplicación f en el punto x.

Etapa 1. $f \in C^1(\Omega)$ **y todos sus ceros son simples.**

De forma análoga a las funciones de una variable decimos que $x \in \Omega$ es un cero simple si $f(x) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^m$ y $det(f'(x)) \neq 0$, donde $f'(x) \in \mathcal{M}_{m\times m}(\mathbb{R})$ es la matriz jacobiana de la aplicación f en el punto x.
Entonces $f^{-1}(\mathbf{0}) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ es un conjunto finito (por un argumento similar al que hemos utilizado para las funciones de una variable) y se define

Etapa 1. $f \in C^1(\Omega)$ y todos sus ceros son simples.

De forma análoga a las funciones de una variable decimos que $x \in \Omega$ es un cero simple si $f(x) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^m$ y $det(f'(x)) \neq 0$, donde $f'(x) \in \mathcal{M}_{m\times m}(\mathbb{R})$ es la matriz jacobiana de la aplicación f en el punto x.
Entonces $f^{-1}(\mathbf{0}) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ es un conjunto finito (por un argumento similar al que hemos utilizado para las funciones de una variable) y se define

$$deg(f, \Omega) = \sum_{i=1}^{n} sign\, det(f'(x_i)), \tag{4}$$

Ejemplo

Sean $\mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{C}$, $(x, y) \equiv z$, $f(x, y) = (x^2 - y^2 - \varepsilon, 2xy) \equiv z^2 - \varepsilon$, $0 < \varepsilon < 1$ y Ω el disco unidad abierto.

Ejemplo

Sean $\mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{C}$, $(x, y) \equiv z$, $f(x, y) = (x^2 - y^2 - \varepsilon, 2xy) \equiv z^2 - \varepsilon$, $0 < \varepsilon < 1$ y Ω el disco unidad abierto.

Ejemplo

Sean $\mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{C}$, $(x, y) \equiv z$, $f(x, y) = (x^2 - y^2 - \varepsilon, 2xy) \equiv z^2 - \varepsilon$, $0 < \varepsilon < 1$ y Ω el disco unidad abierto.
Entonces $f^{-1}(\mathbf{0}) = \{(\sqrt{\varepsilon}, 0), (-\sqrt{\varepsilon}, 0)\}$ y

$$f'(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix},$$

Ejemplo

Sean $\mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{C}$, $(x, y) \equiv z$, $f(x, y) = (x^2 - y^2 - \varepsilon, 2xy) \equiv z^2 - \varepsilon$, $0 < \varepsilon < 1$ y Ω el disco unidad abierto.
Entonces $f^{-1}(\mathbf{0}) = \{(\sqrt{\varepsilon}, 0), (-\sqrt{\varepsilon}, 0)\}$ y

$$f'(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix},$$

por lo que es un sencillo cálculo comprobar que $deg(f, \Omega) = 2$.

Etapa 2. $f \in C^1(\Omega)$ **pero sus ceros no son necesariamente simples.**

Si $f \in C^1(\Omega)$ se dice que x_0 es un punto crítico de f si

$$det(f'(x_0)) = 0.$$

Etapa 2. $f \in C^1(\Omega)$ pero sus ceros no son necesariamente simples.

Si $f \in C^1(\Omega)$ se dice que x_0 es un punto crítico de f si

$$det(f'(x_0)) = 0.$$

Vamos a denotar como

$$S_f = \{x_0 \in \Omega : det(f'(x_0)) = 0\}$$

al conjunto de los puntos críticos y diremos que $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ es un valor regular si $f^{-1}(\mathbf{y}) \cap S_f = \emptyset$, y un valor singular en caso contrario.

El lema de Sard implica que $f(S_f)$ tiene medida de Lebesgue cero, es decir casi todos los vectores $y \in \mathbb{R}^m$ son valores regulares.

El lema de Sard implica que $f(S_f)$ tiene medida de Lebesgue cero, es decir casi todos los vectores $y \in \mathbb{R}^m$ son valores regulares.
Por tanto aunque $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^m$ no sea un valor regular siempre podemos encontrar una sucesión de valores regulares $y_n \to \mathbf{0}$.

El lema de Sard implica que $f(S_f)$ tiene medida de Lebesgue cero, es decir casi todos los vectores $y \in \mathbb{R}^m$ son valores regulares.
Por tanto aunque $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^m$ no sea un valor regular siempre podemos encontrar una sucesión de valores regulares $y_n \to \mathbf{0}$.
Entonces aplicamos la Etapa 1 a las funciones $f_n = f - y_n$ y definimos

$$deg(f, \Omega) = \lim_{n \to \infty} deg(f_n, \Omega). \tag{5}$$

Ejemplo

Sean $\mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{C}$, $(x, y) \equiv z$, $f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy) \equiv z^2$ y Ω el disco unidad abierto.

Ejemplo

Sean $\mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{C}$, $(x, y) \equiv z$, $f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy) \equiv z^2$ y Ω el disco unidad abierto.

Ejemplo

Sean $\mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{C}$, $(x, y) \equiv z$, $f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy) \equiv z^2$ y Ω el disco unidad abierto.
Ahora $(0, 0)$ es un valor singular de f. Sin embargo $y_n = (1/n, 0)$ es un valor regular para todo $n \in \mathbb{N}$, y por tanto definiendo $f_n = f - y_n$ se sigue por el Ejemplo 2.1 que

$$deg(f, \Omega) = \lim_{n \to \infty} deg(f_n, \Omega) = 2.$$

Etapa 3. Caso general: $f \in C(\overline{\Omega})$.

La idea ahora es aproximar f uniformemente por una sucesión de funciones f_n de clase C^1 (siempre es posible por el Teorema de aproximación de Weierstrass) a las que podemos aplicar la Etapa 2.

Etapa 3. Caso general: $f \in C(\overline{\Omega})$**.**

La idea ahora es aproximar f uniformemente por una sucesión de funciones f_n de clase C^1 (siempre es posible por el Teorema de aproximación de Weierstrass) a las que podemos aplicar la Etapa 2. De esta forma se define

$$deg(f, \Omega) = \lim_{n \to \infty} deg(f_n, \Omega). \tag{6}$$

Ejemplo

Sean $f(x) = |x|$ y $\Omega = (-1, 1)$ el intervalo abierto unidad en $\mathbb{R}$.

Ejemplo

Sean $f(x) = |x|$ y $\Omega = (-1, 1)$ el intervalo abierto unidad en $\mathbb{R}$.

Ejemplo

Sean $f(x) = |x|$ y $\Omega = (-1, 1)$ el intervalo abierto unidad en $\mathbb{R}$. Definiendo $f_n(x) = \sqrt{x^2 + 1/n}$ estamos en las condiciones de la Etapa 1 y $deg(f_n, \Omega) = 0$ porque f_n no tiene ceros en Ω. Como f_n converge uniformemente a f en $[0, 1]$ se tiene entonces que

$$deg(f, \Omega) = \lim_{n\to\infty} deg(f_n, \Omega) = 0.$$

Ejemplo

El grado de una aplicación de una variable $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua y con $f(x) \neq 0$ para $x = a, b$ viene dado por la fórmula

$$deg(f, (a, b)) = \begin{cases} 0 & \text{si } f(a)f(b) > 0, \\ 1 & \text{si } f(a) < 0 \text{ y } f(b) > 0, \\ -1 & \text{si } f(a) > 0 \text{ y } f(b) < 0. \end{cases}$$

Ejemplo

El grado de una aplicación de una variable $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua y con $f(x) \neq 0$ para $x = a, b$ viene dado por la fórmula

$$deg(f, (a, b)) = \begin{cases} 0 & \text{si } f(a)\, f(b) > 0, \\ 1 & \text{si } f(a) < 0 \text{ y } f(b) > 0, \\ -1 & \text{si } f(a) > 0 \text{ y } f(b) < 0. \end{cases}$$

Ejemplo

El grado de una aplicación de una variable $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua y con $f(x) \neq 0$ para $x = a, b$ viene dado por la fórmula

$$deg(f, (a, b)) = \begin{cases} 0 & \text{si } f(a)f(b) > 0, \\ 1 & \text{si } f(a) < 0 \text{ y } f(b) > 0, \\ -1 & \text{si } f(a) > 0 \text{ y } f(b) < 0. \end{cases}$$

Teniendo en cuenta esta fórmula el teorema de Bolzano puede formularse de la siguiente manera: si $deg(f, (a, b)) \neq 0$ entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

Definición

Sea

$$M = \{(f, \Omega) : \Omega \subset \mathbb{R}^m \text{abierto y acotado},$$

$$f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^m \text{continua y } \mathbf{0} \notin f(\partial\Omega)\}.$$

Teorema

Existe una única aplicación $deg : M \to \mathbb{Z}$, *llamada grado de Brouwer, que satisface las siguientes propiedades:*

Teorema

Existe una única aplicación $deg : M \to \mathbb{Z}$*, llamada grado de Brouwer, que satisface las siguientes propiedades:*

(d1) *(Normalización) Si* $\mathbf{0} \in \Omega$ *entonces*

$$deg(I, \Omega) = 1.$$

Teorema

Existe una única aplicación deg : $M \to \mathbb{Z}$, *llamada grado de Brouwer, que satisface las siguientes propiedades:*

(d1) *(Normalización) Si* $\mathbf{0} \in \Omega$ *entonces*

$$deg(I, \Omega) = 1.$$

(d2) *(Aditividad) Si* Ω_1 *y* Ω_2 *son subconjuntos abiertos disjuntos de* Ω *y* $\mathbf{0} \notin f(\overline{\Omega} \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2))$ *entonces*

$$deg(f, \Omega) = deg(f, \Omega_1) + deg(f, \Omega_2).$$

Teorema

Existe una única aplicación $deg : M \to \mathbb{Z}$, *llamada grado de Brouwer, que satisface las siguientes propiedades:*

(d1) *(Normalización) Si* $\mathbf{0} \in \Omega$ *entonces*

$$deg(I, \Omega) = 1.$$

(d2) *(Aditividad) Si* Ω_1 *y* Ω_2 *son subconjuntos abiertos disjuntos de* Ω *y* $\mathbf{0} \notin f(\overline{\Omega} \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2))$ *entonces*

$$deg(f, \Omega) = deg(f, \Omega_1) + deg(f, \Omega_2).$$

(d3) *(Invarianza por homotopías) Si* $h : [0,1] \times \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^m$ *es continua y* $\mathbf{0} \notin h(t, \partial\Omega)$ *para todo* $t \in [0,1]$ *entonces*

$$deg(h(t, \cdot), \Omega) \text{es independiente de } t.$$

Observación

Algunos precedentes del grado topológico aparecen ya en los trabajos de Gauss, Liouville, Cauchy, Kronecker, Poincaré, Hadamard,... hasta culminar en los artículos de Brouwer entre 1910 y 1912

Figura: L. E. J. Brouwer

Proposición

El grado de Brouwer $deg : M \to \mathbb{Z}$ *satisface*

Proposición

El grado de Brouwer $deg : M \to \mathbb{Z}$ *satisface*

(d4) *(Existencia) Si* $deg(f, \Omega) \neq 0$ *entonces existe* $x \in \Omega$ *tal que* $f(x) = \mathbf{0}$*.*

Proposición

El grado de Brouwer $deg : M \to \mathbb{Z}$ satisface

(d4) *(Existencia) Si $deg(f, \Omega) \neq 0$ entonces existe $x \in \Omega$ tal que $f(x) = \mathbf{0}$.*

(d5) *(Dependencia de los valores en la frontera) Si $f(x) = g(x)$ para todo $x \in \partial\Omega$ entonces*

$$deg(f, \Omega) = deg(g, \Omega).$$

Proposición

El grado de Brouwer $deg : M \to \mathbb{Z}$ *satisface*

(d4) *(Existencia) Si* $deg(f, \Omega) \neq 0$ *entonces existe* $x \in \Omega$ *tal que* $f(x) = \mathbf{0}$.

(d5) *(Dependencia de los valores en la frontera) Si* $f(x) = g(x)$ *para todo* $x \in \partial\Omega$ *entonces*

$$deg(f, \Omega) = deg(g, \Omega).$$

(d6) *(Escisión) Si* $\Omega_1 \subset \Omega$ *es un abierto y* $\mathbf{0} \notin f(\overline{\Omega} \setminus \Omega_1)$ *entonces*

$$deg(f, \Omega) = deg(f, \Omega_1).$$

Proposición

El grado de Brouwer $deg : M \to \mathbb{Z}$ satisface

(d4) *(Existencia) Si $deg(f, \Omega) \neq 0$ entonces existe $x \in \Omega$ tal que $f(x) = \mathbf{0}$.*

(d5) *(Dependencia de los valores en la frontera) Si $f(x) = g(x)$ para todo $x \in \partial\Omega$ entonces*

$$deg(f, \Omega) = deg(g, \Omega).$$

(d6) *(Escisión) Si $\Omega_1 \subset \Omega$ es un abierto y $\mathbf{0} \notin f(\overline{\Omega} \setminus \Omega_1)$ entonces*

$$deg(f, \Omega) = deg(f, \Omega_1).$$

(d7) *(Grado de aplicaciones lineales inversibles) Si $A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ es lineal con $det(A) \neq 0$ y $\mathbf{0} \in \Omega$ entonces*

$$deg(A, \Omega) = sign(det(A)).$$

Teorema (Teorema de Brouwer del punto fijo)

Si $B \subset \mathbb{R}^m$ es una bola abierta y $f : \overline{B} \to \overline{B}$ es continua entonces existe $x \in \overline{B}$ tal que $x = f(x)$.

Demostración. Suponemos que $f(x) \neq x$ para $x \in \partial B$ (sino el teorema ya estaría probado).

Demostración. Suponemos que $f(x) \neq x$ para $x \in \partial B$ (sino el teorema ya estaría probado). Entonces $h(t,x) := x - t\,f(x)$ es una homotopía admisible porque $f(\overline{B}) \subset \overline{B}$.

Demostración. Suponemos que $f(x) \neq x$ para $x \in \partial B$ (sino el teorema ya estaría probado). Entonces $h(t,x) := x - t\,f(x)$ es una homotopía admisible porque $f(\overline{B}) \subset \overline{B}$.Por $(d3)$ y $(d1)$ se sigue que

$$deg(I - f, B) = deg(h(1,\cdot), B) = deg(h(0,\cdot), B) = deg(I, B) = 1,$$

y por $(d4)$ se obtiene la existencia de $x \in B$ tal que $x - f(x) = 0 \Leftrightarrow x = f(x)$. $\square$

Teorema (Teorema del erizo)

Sean $B \subset \mathbb{R}^m$ la bola unidad de $\mathbb{R}^m$, m impar y $f : \partial B \equiv S^{m-1} \to \mathbb{R}^m \setminus \{\mathbf{0}\}$ una función continua.

Entonces existen $x \in S^{m-1}$ y $\lambda \neq 0$ tales que $f(x) = \lambda x$.

Demostración. El teorema de extensión de Tietze garantiza que existe $\bar{f}$ una extensión continua de f.

Demostración. El teorema de extensión de Tietze garantiza que existe $\bar{f}$ una extensión continua de f.

Supongamos que no existen $x \in S^{m-1}$ y $\lambda \neq 0$ tales que $f(x) = \lambda x$ entonces

Demostración. El teorema de extensión de Tietze garantiza que existe $\overline{f}$ una extensión continua de f.

Supongamos que no existen $x \in S^{m-1}$ y $\lambda \neq 0$ tales que $f(x) = \lambda x$ entonces

$h_1(t,x) = (1-t)\overline{f}(x) + t\,x$ es una homotopía admisible entre $\overline{f}$ y la identidad I

Demostración. El teorema de extensión de Tietze garantiza que existe $\bar{f}$ una extensión continua de f.

Supongamos que no existen $x \in S^{m-1}$ y $\lambda \neq 0$ tales que $f(x) = \lambda x$ entonces

$h_1(t, x) = (1 - t)\bar{f}(x) + t\, x$ es una homotopía admisible entre $\bar{f}$ y la identidad I

$h_2(t, x) = (1 - t)\bar{f}(x) - t\, x$ es una homotopía admisible entre $\bar{f}$ y $-I$.

Demostración. El teorema de extensión de Tietze garantiza que existe $\bar{f}$ una extensión continua de f.

Supongamos que no existen $x \in S^{m-1}$ y $\lambda \neq 0$ tales que $f(x) = \lambda x$ entonces

$h_1(t,x) = (1-t)\bar{f}(x) + t\,x$ es una homotopía admisible entre $\bar{f}$ y la identidad I

$h_2(t,x) = (1-t)\bar{f}(x) - t\,x$ es una homotopía admisible entre $\bar{f}$ y $-I$.

Por tanto, la propiedad $(d3)$ nos lleva a la siguiente contradicción

$$1 = deg(I,B) = deg(\bar{f},B) = deg(-I,B) = (-1)^m = -1.$$

$\square$

Ejemplo

Sean $l^2 = \{(x_1, x_2, \dots) : \sum_{j=1}^{\infty} x_j^2 < \infty\}$ con la norma $\|x\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty} x_j^2}$, B la bola abierta unidad y $T : \overline{B} \to \overline{B}$ definida como

$$T(x) = \left(\sqrt{1 - \|x\|^2}, x_1, x_2, \dots \right).$$

Ejemplo

Sean $l^2 = \{(x_1, x_2, \ldots) : \sum_{j=1}^{\infty} x_j^2 < \infty\}$ con la norma $\|x\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty} x_j^2}$, B la bola abierta unidad y $T : \overline{B} \to \overline{B}$ definida como

$$T(x) = \left(\sqrt{1 - \|x\|^2}, x_1, x_2, \ldots\right).$$

Ejemplo

Sean $l^2 = \{(x_1, x_2, \dots) : \sum_{j=1}^{\infty} x_j^2 < \infty\}$ con la norma $\|x\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty} x_j^2}$, B la bola abierta unidad y $T : \overline{B} \to \overline{B}$ definida como

$$T(x) = \left(\sqrt{1 - \|x\|^2}, x_1, x_2, \dots\right).$$

Sin embargo T no tiene puntos fijos porque $\|T(x)\| = 1$ para todo $x \in \overline{B}$ por lo que si $T(x) = x$ se tendría

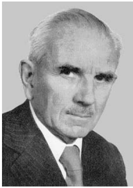
$$T(x) = (0, x_1, x_2, \dots) = x = (x_1, x_2, \dots),$$

lo que implica $x = \mathbf{0}$, pero $T\mathbf{0} = (1, 0, 0, \dots)$. $\square$

Definición

Sean X un espacio de Banach y $D \subset X$. Decimos que el operador $T : D \to X$ es compacto si es continuo y además $\overline{T(D)}$ es un subconjunto compacto de X.

En 1934, en su famoso trabajo "Topologie et équations fonctionnelles", Leray y Schauder extendieron el grado de Brouwer a las perturbaciones compactas de la identidad, i.e., operadores de la forma $I - T$ con T compacto.



J. Leray

J. Schauder

Se define $\mathcal{M}$ como el conjunto de los pares $(\Omega, I - T)$ tales que

$$\Omega \subset X \quad \text{es abierto y acotado,}$$

$$T : \overline{\Omega} \to X \quad \text{compacto y } \mathbf{0} \notin (I - T)(\partial\Omega).$$

Se define $\mathcal{M}$ como el conjunto de los pares $(\Omega, I - T)$ tales que

$$\Omega \subset X \quad \text{es abierto y acotado,}$$

$$T : \overline{\Omega} \to X \quad \text{compacto y } \mathbf{0} \notin (I - T)(\partial\Omega).$$

La propiedad clave para extender el grado de Brouwer es la siguiente: un operador compacto T puede ser aproximado uniformemente por una sucesión de operadores de rango finito T_n.

Se define $\mathcal{M}$ como el conjunto de los pares $(\Omega, I - T)$ tales que

$$\Omega \subset X \quad \text{es abierto y acotado,}$$

$$T : \overline{\Omega} \to X \quad \text{compacto y } \mathbf{0} \notin (I - T)(\partial\Omega).$$

La propiedad clave para extender el grado de Brouwer es la siguiente: un operador compacto T puede ser aproximado uniformemente por una sucesión de operadores de rango finito T_n. Entonces se define

$$D(I - T, \Omega) = \lim_{n \to \infty} deg(I - T_n, \Omega_n),$$

donde $\Omega_n = \Omega \cap X_n$ siendo $X_n = span\{T_n(\overline{\Omega})\}$

Teorema

Existe una única aplicación $D : \mathcal{M} \to \mathbb{Z}$, *llamada grado de Leray-Schauder, que satisface las siguientes propiedades:*

Teorema

Existe una única aplicación $D : \mathcal{M} \to \mathbb{Z}$, *llamada grado de Leray-Schauder, que satisface las siguientes propiedades:*

(D1) *(Normalización) Si* $\mathbf{0} \in \Omega$ *entonces*

$$D(I, \Omega) = 1.$$

Teorema

Existe una única aplicación $D : \mathcal{M} \to \mathbb{Z}$, llamada grado de Leray-Schauder, que satisface las siguientes propiedades:

(D1) *(Normalización) Si $\mathbf{0} \in \Omega$ entonces*

$$D(I, \Omega) = 1.$$

(D2) *(Aditividad) Si Ω_1 y Ω_2 son subconjuntos abiertos disjuntos de Ω y $\mathbf{0} \notin (I - T)(\overline{\Omega} \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2))$ entonces*

$$D(I - T, \Omega) = D(I - T, \Omega_1) + D(I - T, \Omega_2).$$

Teorema

Existe una única aplicación $D : \mathcal{M} \to \mathbb{Z}$, llamada grado de Leray-Schauder, que satisface las siguientes propiedades:

(D1) *(Normalización) Si $\mathbf{0} \in \Omega$ entonces*

$$D(I, \Omega) = 1.$$

(D2) *(Aditividad) Si Ω_1 y Ω_2 son subconjuntos abiertos disjuntos de Ω y $\mathbf{0} \notin (I - T)(\overline{\Omega} \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2))$ entonces*

$$D(I - T, \Omega) = D(I - T, \Omega_1) + D(I - T, \Omega_2).$$

(D3) *(Invarianza por homotopías) Si $H : [0, 1] \times \overline{\Omega} \to X$ es una homotopía compacta y $\mathbf{0} \notin (I - H(t, \cdot))(\partial\Omega)$ para todo $t \in [0, 1]$ entonces*

$$D(I - H(t, \cdot), \Omega) \text{es independiente de } t.$$

Teorema (Teorema de Schauder del punto fijo)

Si $B \subset X$ es una bola abierta y $T : \overline{B} \to \overline{B}$ es compacto entonces existe $x \in \overline{B}$ tal que $x = T(x)$.

Consideremos el siguiente problema de frontera periódico de segundo orden

$$\begin{cases} u''(t) = f(t, u(t), u'(t)), \\ u(0) = u(2\pi), \;\; u'(0) = u'(2\pi). \end{cases}$$

Definición

Una función $\alpha \in \mathcal{C}^2([0, 2\pi])$ es una subsolución del problema periódico si

$$\alpha''(t) \geq f(t, \alpha(t), \alpha'(t)) \quad \text{para todo } t \in [0, 2\pi],$$

$$\alpha(0) = \alpha(2\pi) \quad \text{y} \quad \alpha'(0) \geq \alpha'(2\pi).$$

Definición

Una función $\alpha \in \mathcal{C}^2([0, 2\pi])$ es una subsolución del problema periódico si

$$\alpha''(t) \geq f(t, \alpha(t), \alpha'(t)) \quad \text{para todo } t \in [0, 2\pi],$$

$$\alpha(0) = \alpha(2\pi) \quad \text{y} \quad \alpha'(0) \geq \alpha'(2\pi).$$

Definición

Una función $\alpha \in \mathcal{C}^2([0, 2\pi])$ es una subsolución del problema periódico si

$$\alpha''(t) \geq f(t, \alpha(t), \alpha'(t)) \quad \text{para todo } t \in [0, 2\pi],$$

$$\alpha(0) = \alpha(2\pi) \quad \text{y} \quad \alpha'(0) \geq \alpha'(2\pi).$$

Una función $\beta \in \mathcal{C}^2([0, 2\pi])$ es una sobresolución del problema periódico si

$$\beta''(t) \leq f(t, \beta(t), \beta'(t)) \quad \text{para todo } t \in [0, 2\pi],$$

$$\beta(0) = \beta(2\pi) \quad \text{y} \quad \beta'(0) \leq \beta'(2\pi).$$

Consideremos primero el problema sin dependencia en la derivada

$$\left\{ \begin{array}{c} u''(t) = f(t, u(t)), \\ u(0) = u(2\pi), \;\; u'(0) = u'(2\pi). \end{array} \right.$$

Consideremos primero el problema sin dependencia en la derivada

$$\begin{cases} u''(t) = f(t, u(t)), \\ u(0) = u(2\pi), \ u'(0) = u'(2\pi). \end{cases}$$

Teorema

Sea $f : [0, 2\pi] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua. Supongamos que existe una subsolución, α, y una sobresolución, β con $\alpha \leq \beta$.

Entonces el problema periódico tiene al menos una solución $u \in \mathcal{C}^2([0, 2\pi])$ que además satisface

$$\alpha(t) \leq u(t) \leq \beta(t) \quad \textit{para todo } t \in [0, 2\pi].$$

Esquema de la demostración.

- (Paso 1) Se considera el problema modificado

$$u'' - u = f(t, \gamma(t, u)) - \gamma(t, u),$$

$$u(0) = u(2\pi), \ u'(0) = u'(2\pi),$$

donde $\gamma(t, u) = \text{máx}\{\alpha(t), \text{mín}\{u, \beta(t)\}\}$.

$\square$

Esquema de la demostración.

- (Paso 1) Se considera el problema modificado

$$u'' - u = f(t, \gamma(t,u)) - \gamma(t,u),$$

$$u(0) = u(2\pi), \;\; u'(0) = u'(2\pi),$$

donde $\quad \gamma(t,u) = \max\{\alpha(t), \min\{u, \beta(t)\}\}.$

- (Paso 2) El problema modificado tiene solución (Teorema de Schauder).

□

Esquema de la demostración.

- (Paso 1) Se considera el problema modificado

$$u'' - u = f(t, \gamma(t, u)) - \gamma(t, u),$$

$$u(0) = u(2\pi), \;\; u'(0) = u'(2\pi),$$

$$\text{donde} \quad \gamma(t, u) = \text{máx}\{\alpha(t), \text{mín}\{u, \beta(t)\}\}.$$

- (Paso 2) El problema modificado tiene solución (Teorema de Schauder).
- (Paso 3) Cualquier solución del problema modificado está entre α y β ($\Rightarrow \gamma(t, u) = u$).

$\square$

Consideremos ahora el problema con dependencia en la derivada u'

$$\begin{cases} u''(t) = f(t, u(t), u'(t)), \\ u(0) = u(2\pi), \;\; u'(0) = u'(2\pi). \end{cases}$$

Una de las dificultades que se presenta ahora es que el operador $N(u) := f(\cdot, u, u')$ está definido en $C^1([0, 2\pi])$ y no en $C([0, 2\pi])$.

Una de las dificultades que se presenta ahora es que el operador $N(u) := f(\cdot, u, u')$ está definido en $C^1([0, 2\pi])$ y no en $C([0, 2\pi])$.

El método de las sub y sobresoluciones nos proporcionan cotas a priori en u, pero para poder aplicar la teoría del grado necesitamos también cotas a priori en u'. ¿Cómo podemos deducir cotas a priori en la derivada?

Definición (Condición de Nagumo)

Sean $\alpha \le \beta$ y

$$E := \{(t,u,v) \in [0,2\pi] \times \mathbb{R}^2 : \alpha(t) \le u \le \beta(t)\}.$$

Decimos que la función continua $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ satisface una condición de Nagumo si

$$|f(t,u,v)| \le \varphi(|v|), \quad (t,u,v) \in E,$$

donde $\varphi : [0,\infty) \to (0,\infty)$ es continua y

$$\int_0^\infty \frac{s}{\varphi(s)} ds = +\infty.$$

PROPOSICIÓN (ACOTACIÓN A PRIORI DE LA DERIVADA)

Sea $\varphi : [0,\infty) \to (0,\infty)$ *continua tal que*

$$\int_0^\infty \frac{s}{\varphi(s)} ds = +\infty.$$

Entonces dado $r > 0$ *existe* $R > 0$ *tal que si*

$$|f(t,u,v)| \le \varphi(|v|), \quad -r \le u \le r$$

y cualquier solución u *de* $u'' = f(t,u,u')$ *tal que* $\|u\|_\infty \le r$ *satisface* $\|u'\|_\infty \le R$

Teorema

Sean α y β sub y sobresoluciones con $\alpha \leq \beta$ y supongamos que $f : E \to \mathbb{R}$ satisface una condición de Nagumo.

Entonces el problema periódico tiene al menos una solución $u \in \mathcal{C}^2([0, 2\pi])$ que además satisface

$$\alpha(t) \leq u(t) \leq \beta(t) \quad \text{para todo } t \in [0, 2\pi].$$

Esquema de la demostración. Se considera la familia de problemas

$$u'' = \lambda f(t, \gamma(t,u), u') + \varphi(|u'|)(u - \lambda\gamma(t,u))$$

$$u(0) = u(2\pi), \;\; u'(0) = u'(2\pi),$$

Esquema de la demostración. Se considera la familia de problemas

$$u'' = \lambda f(t, \gamma(t,u), u') + \varphi(|u'|)(u - \lambda\gamma(t,u))$$

$$u(0) = u(2\pi), \;\; u'(0) = u'(2\pi),$$

y se elige $r > 0$ tal que

$$-r < \alpha(t) \leq \beta(t) < r,$$

$$f(t, \alpha(t), 0) + \varphi(0)(-r - \alpha(t)) < 0,$$

$$f(t, \beta(t), 0) + \varphi(0)(r - \beta(t)) > 0,$$

- Paso 1. Para $\lambda \in [0, 1]$ cualquier solución u es tal que $\|u\|_\infty < r$.

- Paso 1. Para $\lambda \in [0,1]$ cualquier solución u es tal que $\|u\|_\infty < r$.

- Paso 2. Existe $R > 0$ tal que para $\lambda \in [0,1]$ cualquier solución u es tal que $\|u'\|_\infty < R$.

- Paso 3. Existencia de solución para $\lambda = 1$.

$$L(u) := u'' - u,$$

$$N_\lambda(u) := \lambda f(t, \gamma(t, u), u') + \varphi(|u'|)(u - \lambda\gamma(t, u)) - u$$

$$T_\lambda(u) = L^{-1} N_\lambda(u)$$

- Paso 3. Existencia de solución para $\lambda = 1$.

$$L(u) := u'' - u,$$

$$N_\lambda(u) := \lambda f(t, \gamma(t, u), u') + \varphi(|u'|)(u - \lambda\gamma(t, u)) - u$$

$$T_\lambda(u) = L^{-1} N_\lambda(u)$$

- Paso 3. Existencia de solución para $\lambda = 1$.

$$L(u) := u'' - u,$$

$$N_\lambda(u) := \lambda f(t, \gamma(t,u), u') + \varphi(|u'|)(u - \lambda\gamma(t,u)) - u$$

$$T_\lambda(u) = L^{-1} N_\lambda(u)$$

Por los Pasos 1 y 2 se satisface que la homotopía compacta $I - T_\lambda$ es admisible y por tanto

$$D(I - T_0, \Omega) = D(I - T_1, \Omega),$$

donde $\Omega = \{u \in C^1([0, 2\pi]) : \|u\|_\infty < r, \|u'\|_\infty < R\}$.

Además como T_0 es una aplicación impar se satisface que

$$D(I - T_0, \Omega) \neq 0,$$

y entonces $D(I - T_1, \Omega) \neq 0$ por lo que existe

$$u = T_1 u.$$

- Paso 4. Cualquier solución u para $\lambda = 1$ satisface que $\alpha \leq u \leq \beta$ ($\Rightarrow \gamma(t, u) = u$).

$\square$

- Paso 4. Cualquier solución u para $\lambda = 1$ satisface que $\alpha \leq u \leq \beta$ ($\Rightarrow \gamma(t, u) = u$).

- Conclusión: existe una solución $u \in \mathcal{C}^2([0, 2\pi])$ con $\alpha \leq u \leq \beta$.

$\square$

Más información en mi página web

http://www4.ujaen.es/~angelcid

¡GRACIAS POR LA ATENCIÓN!