Grado topológico y ecuaciones diferenciales

José Ángel Cid

1. Introducción

La mayoría de las ecuaciones diferenciales no pueden resolverse de forma explícita. Por ello en su estudio se utilizan tanto métodos numéricos para obtener información cuantitativa como métodos analíticos y topológicos que proporcionan información cualitativa.

El objetivo de estas notas es mostrar que el grado topológico es una poderosa herramienta para obtener información cualitativa sobre una amplia variedad de problemas no lineales, entre los que se encuentran diversos problemas de frontera para ecuaciones diferenciales.

Empezamos con un ejemplo sencillo: dada $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua y 2π -periódica (i.e., $F(t + 2\pi, x) = F(t, x)$ para todo $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$), ¿tiene la ecuación $x' = F(t, x)$ alguna solución 2π-periódica?

Este problema es equivalente a la existencia de una solución para el problema de frontera

$$\begin{cases} x' = F(t, x), & \text{para todo } t \in [0, 2\pi] \\ x(0) = x(2\pi), & \end{cases} \tag{1}$$

El siguiente teorema, junto con algunas aplicaciones al estudio de la dinámica de poblaciones, puede encontrarse en [15].

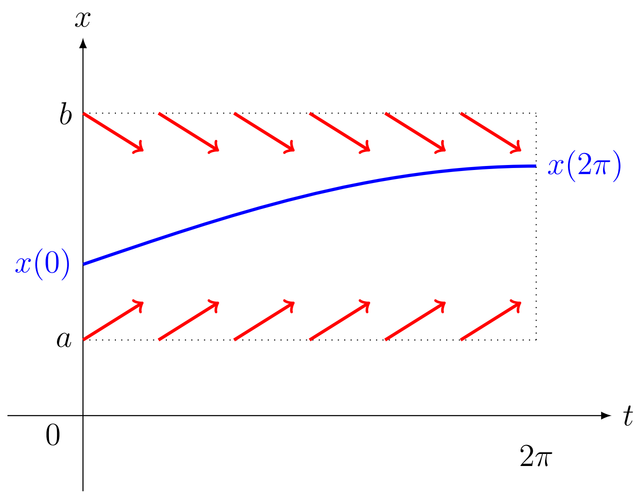
Teorema 1.1. *Supongamos que $F : [0, 2\pi] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $\frac{\partial F}{\partial x} : [0, 2\pi] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son continuas.*

Si existen constantes $a < b$ tales que

$$F(t, a) > 0 \quad y \quad F(t, b) < 0,$$

entonces existe una solución del problema (1).

Demostración.



Debido a nuestras hipótesis se verifican las siguientes propiedades:

- Unicidad para el problema de valor inicial asociado a $x' = F(t, x)$.
- Cualquier solución del problema de valor inicial con $x(0) \in [a, b]$ está bien definida en todo el intervalo $[0, 2\pi]$.

Para cada $y \in [a, b]$, sea $\varphi(t, y)$ la solución de

$$\begin{cases} x' = F(t, x), & \text{para todo } t \in [0, 2\pi] \\ x(0) = y. \end{cases} \tag{2}$$

Por el teorema de dependencia continua con respecto a las condiciones iniciales la aplicación φ es continua y por tanto también lo es la siguiente función de una variable $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ definida como

$$f(y) = \varphi(2\pi, y) - \varphi(0, y).$$

Por su definición está claro que es equivalente encontrar una solución de (1) y encontrar un cero de la función real f. Además

$$f(a) = \varphi(2\pi, a) - a > 0 \quad \text{y} \quad f(b) = \varphi(2\pi, b) - b < 0,$$

por lo que el Teorema de Bolzano implica que existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$. Por tanto existe una solución de (1) con $x(0) = c$. □

Como el ejemplo anterior pone de manifiesto, muchos problemas en análisis se reducen a resolver una ecuación de la forma

$$f(x) = \mathbf{0},$$

donde f es una función definida en un subconjunto de un cierto espacio de Banach. Entonces la cuestión es, ¿cómo podemos probar la existencia de ceros para una función definida en un espacio de dimensión finita mayor que uno?, ¿y si el espacio es de dimensión infinita?

El grado topológico es la herramienta más útil y potente que se conoce para responder a estas preguntas. Desde el punto de vista de un analista el grado topológico es un "contador algebraico"del número de soluciones de la ecuación

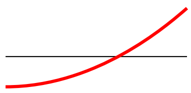
$$f(x) = 0.$$

Para que sea útil en las aplicaciones el grado de una función ha de ser invariante con respecto a pequeñas perturbaciones. La familia

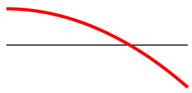
$$f_\varepsilon(x) = x^2 + \varepsilon,$$

pone de manifiesto que el número de soluciones de una ecuación es una cantidad que en general no se conserva.

La clave consiste en añadir a cada cero de f un signo positivo o negativo (así el grado es un número entero, por eso decimos que es un "contador algebraico"del número de ceros).



cero +



cero -

Si $f \in C^1[a,b]$, $f(x) \neq 0$ para $x = a, b$ y todos los ceros de f son simples (i.e., $f(x) = 0 \Rightarrow f'(x) \neq 0$) entonces f tiene un número finito de ceros $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (porque al ser los ceros de f simples entonces son aislados y como es compacto ha de ser necesariamente finito) y se define

$$deg(f,(a,b)) = \sum_{i=1}^{n} sign\, f'(x_i). \tag{3}$$

Observación 1.1. Si f no se anula entendemos que la suma anterior vale cero.

La ecuación (3) nos proporciona la fórmula para calcular el grado en el caso más sencillo posible (una función de una variable, definida en un intervalo, derivable y con todos sus ceros simples). A continuación vamos a extender esta definición a cualquier función continua de varias variables.

2. El grado de Brouwer

2.1. Construcción del grado de Brouwer

A lo largo de esta sección supondremos siempre que $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ es un conjunto abierto y acotado y que $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^m$ es una función continua que no se anula en la frontera, es decir,

$$f(x) \neq \mathbf{0} \quad \text{para todo } x \in \partial\Omega.$$

Vamos a definir el número entero $deg(f, \Omega)$ (el grado de f relativo a Ω) en varias etapas.

Etapa 1. $f \in C^1(\Omega)$ y todos sus ceros son simples.

De forma análoga a las funciones de una variable decimos que $x \in \Omega$ es un cero simple si $f(x) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^m$ y $det(f'(x)) \neq 0$, donde $f'(x) \in \mathcal{M}_{m\times m}(\mathbb{R})$ es la matriz jacobiana de la aplicación f en el punto x.

Entonces $f^{-1}(\mathbf{0}) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ es un conjunto finito (por un argumento similar al que hemos utilizado para las funciones de una variable) y se define

$$deg(f, \Omega) = \sum_{i=1}^{n} sign\, det(f'(x_i)), \tag{4}$$

extendiendo de esta forma la fórmula (3).

De nuevo entendemos que $deg(f, \Omega) = 0$ cuando $f^{-1}(\mathbf{0}) = \emptyset$.

Ejemplo 2.1. Sean $\mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{C}$, $(x, y) \equiv z$, $f(x, y) = (x^2 - y^2 - \varepsilon, 2xy) \equiv z^2 - \varepsilon$, $0 < \varepsilon < 1$ y Ω el disco unidad abierto.

Entonces $f^{-1}(\mathbf{0}) = \{(\sqrt{\varepsilon}, 0), (-\sqrt{\varepsilon}, 0)\}$ y

$$f'(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix},$$

por lo que es un sencillo cálculo comprobar que $deg(f, \Omega) = 2$.

Etapa 2. $f \in C^1(\Omega)$ pero sus ceros no son necesariamente simples.

Si $f \in C^1(\Omega)$ se dice que x_0 es un *punto crítico* de f si

$$det(f'(x_0)) = 0.$$

Vamos a denotar como

$$S_f = \{x_0 \in \Omega : det(f'(x_0)) = 0\}$$

al conjunto de los puntos críticos y diremos que $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ es un *valor regular* si $f^{-1}(\mathbf{y}) \cap S_f = \emptyset$, y un *valor singular* en caso contrario.

En esta etapa estamos suponiendo que $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^m$ no es necesariamente un valor regular. El lema de Sard afirma que $f(S_f)$ tiene medida de Lebesgue cero (ver [8, Proposition 1.4]), es decir casi todos los vectores $y \in \mathbb{R}^m$ son valores regulares. Por tanto aunque $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^m$ no sea un valor regular siempre podemos encontrar una sucesión de valores regulares convergentes a $\mathbf{0}$ (i.e., $y_n \to \mathbf{0}$ con $f^{-1}(y_n) \cap S_f = \emptyset$). Podemos entonces aplicar la Etapa 1 a las funciones $f_n = f - y_n$ (para valores de n suficientemente grandes tales que $f_n(x) \neq \mathbf{0}$ para todo $x \in \partial\Omega$) y definir

$$deg(f, \Omega) = \lim_{n\to\infty} deg(f_n, \Omega). \tag{5}$$

Por supuesto, para que la definición tenga sentido faltaría probar que la sucesión $deg(f_n, \Omega)$ es constante a partir de un término y que además este valor es independiente de la sucesión y_n elegida.

Ejemplo 2.2. Sean $\mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{C}$, $(x, y) \equiv z$, $f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy) \equiv z^2$ y Ω el disco unidad abierto.

Ahora $(0, 0)$ es un valor singular de f. Sin embargo $y_n = (1/n, 0)$ es un valor regular para todo $n \in \mathbb{N}$, y por tanto definiendo $f_n = f - y_n$ se sigue por el Ejemplo 2.1 que

$$deg(f, \Omega) = \lim_{n\to\infty} deg(f_n, \Omega) = 2.$$

Etapa 3. Caso general: $f \in C(\overline{\Omega})$.

En esta etapa se elimina la hipótesis sobre la regularidad de f. La idea es aproximar f uniformemente por una sucesión de funciones f_n de clase C^1 (siempre es posible por el Teorema de aproximación de Weierstrass) a las que poder aplicar la Etapa 2 (obsérvese que para n grande se satisface que $f_n(x) \neq \mathbf{0}$ para todo $x \in \partial\Omega$). De esta forma se define

$$deg(f, \Omega) = \lim_{n\to\infty} deg(f_n, \Omega). \tag{6}$$

De nuevo faltaría probar que el límite existe y es independiente de la sucesión f_n elegida.

EJEMPLO 2.3. Sean $f(x) = |x|$ y $\Omega = (-1, 1)$ el intervalo abierto unidad en $\mathbb{R}$.

Definiendo $f_n(x) = \sqrt{x^2 + 1/n}$ estamos en las condiciones de la Etapa 1 y $deg(f_n, \Omega) = 0$ porque f_n no tiene ceros en Ω. Como f_n converge uniformente a f en $[0, 1]$ se tiene entonces que

$$deg(f, \Omega) = \lim_{n\to\infty} deg(f_n, \Omega) = 0.$$

EJEMPLO 2.4. El grado de una aplicación de una variable $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua y con $f(x) \neq 0$ para $x = a, b$ viene dado por la fórmula

$$deg(f, (a, b)) = \begin{cases} 0 & \text{si } f(a)\, f(b) > 0, \\ 1 & \text{si } f(a) < 0 \text{ y } f(b) > 0, \\ -1 & \text{si } f(a) > 0 \text{ y } f(b) < 0. \end{cases}$$

Teniendo en cuenta esta fórmula el teorema de Bolzano puede formularse de la siguiente manera: si $deg(f, (a, b)) \neq 0$ entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.Veremos que ésta propiedad también es cierta para funciones de varias variables, siendo la propiedad fundamental a la hora de aplicar el grado topológico a los problemas del análisis no lineal.

2.2. Propiedades del grado de Brouwer

En la construcción del grado de Brouwer que vimos en la sección anterior hemos seguido el enfoque analítico de Nagumo (véanse por ejemplo [5, 10, 13] y [1, 2, 8, 9, 17] para los detalles). Existen muchas otras formas de introducir el grado, por ejemplo usando técnicas de topología algebraica, [6], o grupos de homología, [4]. Sin embargo no importa la forma concreta de definir el grado, pues como pone de manifiesto el siguiente teorema ([8, Theorem 1.1 y Theorem 3.1]) existe una única aplicación que verifica las propiedades listadas como (d_1)- (d_2)-(d_3)), y que por tanto pueden ser utilizadas para definir el grado de forma axiomática.

Sea

$$M = \{(f, \Omega) : \Omega \subset \mathbb{R}^m \text{abierto y acotado, } f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^m \text{continua y } \mathbf{0} \notin f(\partial\Omega)\}.$$

TEOREMA 2.1. *Existe una única aplicación* $deg : M \to \mathbb{Z}$, *llamada grado de Brouwer, que satisface las siguientes propiedades:*

(d1) (Normalización) Si $\mathbf{0} \in \Omega$ *entonces*

$$deg(I, \Omega) = 1.$$

(d2) (Aditividad) Si Ω_1 y Ω_2 son subconjuntos abiertos disjuntos de Ω y $\boldsymbol{0} \notin f(\overline{\Omega} \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2))$ entonces

$$deg(f, \Omega) = deg(f, \Omega_1) + deg(f, \Omega_2).$$

(d3) (Invarianza por homotopías) Si $h : [0,1] \times \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^m$ es continua y $\boldsymbol{0} \notin h(t, \partial\Omega)$ para todo $t \in [0,1]$ entonces

$$deg(h(t,\cdot), \Omega) \textit{es independiente de } t.$$

Observación 2.1. La propiedad (d_1) simplemente fija el valor del grado para la función identidad.

La propiedad (d_2) resulta útil para probar la multiciplidad y localización de las soluciones de la ecuación $f(x) = \mathbf{0}$.

Por su parte (d_3) implica que si f y g son aplicaciones homótopas (i.e., existe $h : [0,1] \times \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^m$ continua tal que $h(0,\cdot) = f$ y $h(1,\cdot) = g$) y además ningún cero cruza la frontera durante la homotopía, es decir,

$$h(t,x) \neq \mathbf{0} \text{ para todo } t \in [0,1] \text{ y } x \in \partial\Omega,$$

entonces

$$deg(f, \Omega) = deg(g, \Omega).$$

Ésta es sin duda una de las propiedades más importantes del grado, explotada una y otra vez en las aplicaciones.

Observación 2.2. Algunos precedentes del grado topológico aparecen ya en los trabajos de Gauss, Liouville, Cauchy, Kronecker, Poincaré, Hadamard,... hasta culminar en los artículos de Brouwer entre 1910 y 1912 (para más detalles sobre aspectos históricos consultar [14, Capítulo 1] y [16]).

Proposición 2.1. *El grado de Brouwer $deg : M \to \mathbb{Z}$ satisface también las siguientes propiedades:*

(d4) (Existencia) Si $deg(f, \Omega) \neq 0$ entonces existe $x \in \Omega$ tal que $f(x) = \boldsymbol{0}$.

(d5) (Dependencia de los valores en la frontera) Si $f(x) = g(x)$ para todo $x \in \partial\Omega$ entonces

$$deg(f, \Omega) = deg(g, \Omega).$$

(d6) (Escisión) Si $\Omega_1 \subset \Omega$ es un abierto y $\boldsymbol{0} \notin f(\overline{\Omega} \setminus \Omega_1)$ entonces

$$deg(f, \Omega) = deg(f, \Omega_1).$$

Figura 1: L. E. J. Brouwer

(d7) (Grado de aplicaciones lineales inversibles) Si $A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ *es lineal con* $det(A) \neq 0$ *y* $\boldsymbol{0} \in \Omega$ *entonces*

$$deg(A, \Omega) = sign(det(A)).$$

OBSERVACIÓN 2.3. Como ya hemos comentado la propiedad (d_4) es crucial en las aplicaciones y garantiza la existencia de solución para el sistema de ecuaciones $f(x) = \mathbf{0}$.

Por su parte ($d5$) expresa una propiedad destacable: el grado de una aplicación depende solo de sus valores en la frontera.

Por otro lado ($d6$) es un caso particular de ($d2$) y nos dice que a la hora de calcular el grado podemos prescindir de aquellos cerrados del dominio que no contengan ningún cero de f.

Obsérvese que para poder aplicar ($d4$) necesitamos garantizar que el grado de una cierta función es distinto de cero. En este sentido la información que proporciona ($d7$) es interesante. Otro resultado importante en esta dirección es el Teorema de Borsuk que nos dice que el grado de una función impar definida en una bola que no se anula en la frontera es impar (puede verse en [8] la demostración del Teorema de Borsuk así como algunas aplicaciones interesantes).

2.3. Aplicaciones del grado de Brouwer

La existencia de una aplicación como la especificada en el Teorema 2.1 no es en absoluto trivial, como ponen de manifiesto los siguientes resultados, que a pesar de su profundidad, son sencillas consecuencias de las propiedades del grado de Brouwer.

Teorema 2.2 (Teorema de Brouwer del punto fijo). *Si* $B \subset \mathbb{R}^m$ *es una bola abierta y* $f : \overline{B} \to \overline{B}$ *es continua entonces existe* $x \in \overline{B}$ *tal que* $x = f(x)$.

Demostración. Suponemos que $f(x) \neq x$ para $x \in \partial B$ (sino el teorema ya estaría probado). Entonces $h(t, x) := x - t\, f(x)$ es una homotopía admisible porque $f(\overline{B}) \subset \overline{B}$.Por $(d3)$ y $(d1)$ se sigue que

$$deg(I - f, B) = deg(h(1, \cdot), B) = deg(h(0, \cdot), B) = deg(I, B) = 1,$$

y por $(d4)$ se obtiene la existencia de $x \in B$ tal que $x - f(x) = 0 \Leftrightarrow x = f(x)$. □

Teorema 2.3 (Teorema del erizo). *Sean* $B \subset \mathbb{R}^m$ *la bola unidad de* $\mathbb{R}^m$, m *impar y* $f : \partial B \equiv S^{m-1} \to \mathbb{R}^m \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ *una función continua.*

Entonces existen $x \in S^{m-1}$ *y* $\lambda \neq 0$ *tales que* $f(x) = \lambda x$.

Demostración. El teorema de extensión de Tietze (ver [17, Proposition 2.1]) garantiza que existe $\bar{f}$ una extensión continua de f (i.e., $\overline{f} : \overline{B} \to \mathbb{R}^m$ continua y $\overline{f}(x) = f(x)$ para todo $x \in \partial B$). Además $deg(\bar{f}, B)$ está definido y por $(d5)$ su valor no depende de la extensión elegida.

Si no existen $x \in S^{m-1}$ y $\lambda \neq 0$ tales que $f(x) = \lambda x$ entonces $h_1(t, x) = (1-t)\bar{f}(x) + t\, x$ es una homotopía admisible entre $\bar{f}$ y la identidad I mientras que $h_2(t, x) = (1 - t)\bar{f}(x) - t\, x$ es una homotopía admisible entre $\bar{f}$ y $-I$. Por tanto, la propiedad $(d3)$ nos lleva a la siguiente contradicción

$$1 = deg(I, B) = deg(\bar{f}, B) = deg(-I, B) = (-1)^m = -1,$$

donde la última igualdad se sigue de $(d7)$ teniendo en cuenta que m es impar. □

Observación 2.4. El teorema anterior implica que cualquier campo de vectores tangentes continuo sobre la esfera de dimensión par (i.e., $f : S^{m-1} \to \mathbb{R}^m$ continua, m impar y $\langle x, f(x) \rangle = 0$ para todo $x \in S^{m-1}$) debe anularse en algún punto. Para $m = 3$ quiere decir que "un erizo (o una bola peluda) no puede peinarse sin que se formen remolinos". Sin embargo sobre cualquier esfera de dimensión impar es fácil encontrar un campo de vectores tangentes continuo que no se anula (por ejemplo sobre S^1 bastaría tomar una rotación de $\pi/2$ radianes).

Pueden verse muchas otras aplicaciones interesantes del grado topológico en [8, 11].

3. El grado de Leray-Schauder

3.1. Imposibilidad de extender el grado de Brouwer a las funciones continuas en dimensión infinita

Nuestro objetivo en esta sección es extender el grado de Brouwer a funciones definidas en espacios de Banach de dimensión infinita. Esta extensión ha sido motivada históricamente por sus aplicaciones a las ecuaciones en derivadas parciales. Sin embargo vamos a poner de manifiesto con un ejemplo sencillo que no puede existir una aplicación cumpliendo $(d1)-(d2)-(d3)$ y definida para todas las funciones continuas cuando el espacio es de dimensión infinita.

Ejemplo 3.1. Sean $l^2 = \{(x_1, x_2, \ldots) : \sum_{j=1}^{\infty} x_j^2 < \infty\}$ con la norma $\|x\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty} x_j^2}$, B la bola abierta unidad y $T : \overline{B} \to \overline{B}$ definida como

$$T(x) = \left(\sqrt{1 - \|x\|^2}, x_1, x_2, \ldots\right).$$

Supongamos que existe una aplicación D definida sobre todas las aplicaciones continuas en $\overline{B}$ que no se anulan en ∂B y que además D satisfacen las propiedades $(d1) - (d2) - (d3)$. Entonces siguiendo el mismo argumento que hemos visto en la demostración del Teorema de Brouwer probaríamos la existencia de un punto fijo para T, es decir existiría $x \in \overline{B}$ tal que $T(x) = x$.

Sin embargo T no tiene puntos fijos porque $\|T(x)\| = 1$ para todo $x \in \overline{B}$ por lo que si $T(x) = x$ se tendría

$$T(x) = (0, x_1, x_2, \ldots) = x = (x_1, x_2, \ldots),$$

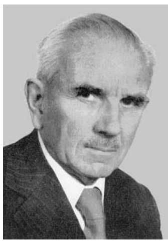
lo que implica $x = \mathbf{0}$, pero $T\mathbf{0} = (1, 0, 0, \ldots)$. □

3.2. El grado de Leray-Schauder: definición y propiedades

El Teorema de Brouwer del punto fijo falla en espacios de dimensión infinita porque las bolas dejan de ser compactas. De hecho Dugundji demostró que en cualquier espacio de Banach de dimensión infinita siempre existe una aplicación continua de la bola unidad cerrada en si misma que no tiene puntos fijos (es decir, el Teorema de Brouwer caracteriza a los espacios de dimensión finita). En la generalización correcta del Teorema de Brouwer y del grado topológico a espacios de dimensión infinita juegan un papel crucial los operadores compactos (introducidos por Schauder en 1930).

Definición 3.1. Sean X un espacio de Banach y $D \subset X$. Decimos que el operador $T : D \to X$ es *compacto* si es continuo y además $\overline{T(D)}$ es un subconjunto compacto de X.

En 1934, en su famoso trabajo "Topologie et équations fonctionnelles", Leray y Schauder extendieron el grado de Brouwer a las perturbaciones compactas de la identidad, i.e., operadores de la forma $I - T$ con T compacto.


J. Leray


J. Schauder

Más precisamente sea X un espacio de Banach de dimensión infinito y denotemos por $\mathcal{M}$ al conjunto de los pares $(I - T, \Omega)$ donde

$$\Omega \subset X \quad \text{es abierto y acotado}, T : \overline{\Omega} \to X \quad \text{compacto y } \mathbf{0} \notin (I - T)(\partial\Omega).$$

La propiedad clave para extender el grado de Brouwer es la siguiente: un operador compacto T puede ser aproximado uniformemente por una sucesión de operadores de rango finito T_n (ver [17, Proposition 2.12]), para los que está definido el grado de Brouwer. Entonces se define

$$D(I - T, \Omega) = \lim_{n\to\infty} deg(I - T_n, \Omega_n),$$

donde $\Omega_n = \Omega \cap X_n$ siendo $X_n = span\{T_n(\overline{\Omega})\}$. Por supuesto habría que probar que el límite existe y es independiente de la sucesión T_n (véase [8]).

De nuevo el grado de Leray-Schauder puede ser caracterizado axiomáticamente ([8]).

Teorema 3.1. *Existe una única aplicación $D : \mathcal{M} \to \mathbb{Z}$, llamada grado de Leray-Schauder, que satisface las siguientes propiedades:*

(D1) (Normalización) Si $\mathbf{0} \in \Omega$ entonces

$$D(I, \Omega) = 1.$$

(D2) (Aditividad) Si Ω_1 y Ω_2 son subconjuntos abiertos disjuntos de Ω y $\mathbf{0} \notin (I - T)(\overline{\Omega} \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2))$ entonces

$$D(I - T, \Omega) = D(I - T, \Omega_1) + D(I - T, \Omega_2).$$

(D3) (Invarianza por homotopías) Si $H : [0,1] \times \overline{\Omega} \to X$ es una homotopía compacta y $\mathbf{0} \notin (I - H(t,\cdot))(\partial\Omega)$ para todo $t \in [0,1]$ entonces

$$D(I - H(t,\cdot), \Omega) \textit{es independiente de } t.$$

Observación 3.1. Las propiedades $(d4) - (d5) - (d6)$ se extienden también al grado de Leray-Schauder.

Observación 3.2. La estrategia general para aplicar la teoría del grado es la siguiente: incluimos nuestro problema como el caso $t = 1$ de una familia dependiendo de un parámetro $t \in [0,1]$, de tal forma que el grado para el problema con $t = 0$ sea distinto de cero y que la homotopía sea admisible (es decir, que no existan soluciones en la frontera). Entonces por $(D3)$ y $(D4)$ se sigue la existencia de solución para $t = 1$, que era nuestro problema original.

La parte más difícil a la hora de aplicar la estrategia anterior es demostrar que a lo largo de la homotopía no aparecen soluciones en la frontera. En la práctica se buscan cotas a priori que han de cumplir las posibles soluciones y sus derivadas (¡aunque todavía no sepamos si existe alguna solución!). El uso de cotas a priori en el estudio de las ecuaciones en derivadas parciales se inicia en los trabajos de Bernstein y fue extendido posteriormente por Leray y Schauder (ver [3]). La importancia de las cotas a priori ha sido resumido humorísticamente por J. Mawhin en el lema: "soy acotado, luego existo".

El análogo al teorema de Brouwer para operadores compactos en espacios de Banach fue demostrado por Schauder. La demostración de este resultado usando el grado de Leray-Schauder es análoga a la que hemos dado para el Teorema de Brouwer.

Teorema 3.2 (Teorema de Schauder del punto fijo). *Si $B \subset X$ es una bola abierta y $T : \overline{B} \to \overline{B}$ es compacto entonces existe $x \in \overline{B}$ tal que $x = T(x)$.*

3.3. Aplicaciones del grado de Leray-Schauder a problemas de frontera

Consideremos el siguiente problema de frontera periódico de segundo orden

$$\begin{cases} u''(t) = f(t, u(t), u'(t)), \\ u(0) = u(2\pi), \ u'(0) = u'(2\pi). \end{cases}$$

Todos los resultados que mostraremos en esta sección pueden encontrarse en [7, Chapter 1].

Definición 3.2. Una función $\alpha \in \mathcal{C}^2([0,2\pi])$ es una subsolución del problema periódico si

$$\alpha''(t) \geq f(t, \alpha(t), \alpha'(t)) \quad \text{para todo } t \in [0,2\pi],$$

$$\alpha(0) = \alpha(2\pi) \quad \text{y} \quad \alpha'(0) \geq \alpha'(2\pi).$$

Una función $\beta \in \mathcal{C}^2([0,2\pi])$ es una sobresolución del problema periódico si

$$\beta''(t) \leq f(t, \beta(t), \beta'(t)) \quad \text{para todo } t \in [0,2\pi],$$
$$\beta(0) = \beta(2\pi) \quad \text{y} \quad \beta'(0) \leq \beta'(2\pi).$$

Consideremos primero el problema sin dependencia en la derivada

$$\begin{cases} u''(t) = f(t, u(t)), \\ u(0) = u(2\pi), \ u'(0) = u'(2\pi). \end{cases}$$

Teorema 3.3. *Sea $f : [0,2\pi] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua. Supongamos que existe una subsolución, α, y una sobresolución, β con $\alpha \leq \beta$.*

Entonces el problema periódico tiene al menos una solución $u \in \mathcal{C}^2([0,2\pi])$ que además satisface

$$\alpha(t) \leq u(t) \leq \beta(t) \quad \textit{para todo } t \in [0,2\pi].$$

Esquema de la demostración.

- (Paso 1) Se considera el problema modificado

$$u'' - u = f(t, \gamma(t,u)) - \gamma(t,u),$$

$$u(0) = u(2\pi), \ u'(0) = u'(2\pi),$$

$$\text{donde} \quad \gamma(t,u) = \text{máx}\{\alpha(t), \text{mín}\{u, \beta(t)\}\}.$$

- (Paso 2) El problema modificado tiene solución (Teorema de Schauder).
- (Paso 3) Cualquier solución del problema modificado está entre α y β ($\Rightarrow \gamma(t,u) = u$).

$\square$

Observación 3.3. En el teorema anterior el orden $\alpha \leq \beta$ es fundamental. Por ejemplo, el problema

$$u''(t) + u(t) = \sin(t), \quad u(0) = u(2\pi),\ u'(0) = u'(2\pi),$$

no tiene solución (por la alternativa de Fredholm). Sin embargo

$$\alpha(t) = 1 \quad \text{y} \quad \beta(t) = -1$$

son una sub y una sobresolución, pero $\alpha > \beta$.

Consideremos ahora el problema con dependencia en la derivada u'

$$\begin{cases} u''(t) = f(t, u(t), u'(t)), \\ u(0) = u(2\pi),\ u'(0) = u'(2\pi). \end{cases}$$

Una de las dificultades que se presenta ahora es que el operador $N(u) := f(\cdot, u, u')$ está definido en $C^1([0, 2\pi])$ y no en $C([0, 2\pi])$.

El método de las sub y sobresoluciones nos proporcionan cotas a priori en u, pero para poder aplicar la teoría del grado *necesitamos también cotas a priori en* u'. ¿Cómo podemos deducir cotas a priori en la derivada?

En general necesitamos una condición de Nagumo que controle el crecimiento de f con respecto a u'.

Definición 3.3 (Condición de Nagumo). Sean $\alpha \leq \beta$ y

$$E := \{(t, u, v) \in [0, 2\pi] \times \mathbb{R}^2 : \alpha(t) \leq u \leq \beta(t)\}.$$

Decimos que la función continua $f : E \to \mathbb{R}$ satisface una condición de Nagumo si

$$|f(t, u, v)| \leq \varphi(|v|), \quad (t, u, v) \in E,$$

donde $\varphi : [0, \infty) \to (0, \infty)$ es continua y

$$\int_0^\infty \frac{s}{\varphi(s)} ds = +\infty.$$

A partir de la condición de Nagumo podemos obtener cotas a priori para las derivadas de las posibles soluciones.

Proposición 3.1 (Acotación a priori de la derivada). *Sea* $\varphi : [0, \infty) \to (0, \infty)$ *continua tal que*

$$\int_0^\infty \frac{s}{\varphi(s)} ds = +\infty.$$

Entonces dado $r > 0$ *existe* $R > 0$ *tal que si*

$$|f(t, u, v)| \leq \varphi(|v|), \quad -r \leq u \leq r$$

y cualquier solución u *de* $u'' = f(t, u, u')$ *tal que* $\|u\|_\infty \leq r$ *satisface* $\|u'\|_\infty \leq R$

El siguiente es el principal resultado de esta sección.

TEOREMA 3.4. *Sean α y β sub y sobresoluciones con $\alpha \leq \beta$ y supongamos que $f : E \to \mathbb{R}$ satisface una condición de Nagumo.*

Entonces el problema periódico tiene al menos una solución $u \in \mathcal{C}^2([0, 2\pi])$ que además satisface

$$\alpha(t) \leq u(t) \leq \beta(t) \quad \textit{para todo } t \in [0, 2\pi].$$

Esquema de la demostración. Se considera la familia de problemas

$$u'' = \lambda f(t, \gamma(t, u), u') + \varphi(|u'|)(u - \lambda\gamma(t, u))$$

$$u(0) = u(2\pi), \; u'(0) = u'(2\pi),$$

y se elige $r > 0$ tal que

$$-r < \alpha(t) \leq \beta(t) < r,$$

$$f(t, \alpha(t), 0) + \varphi(0)(-r - \alpha(t)) < 0,$$
$$f(t, \beta(t), 0) + \varphi(0)(r - \beta(t)) > 0,$$

- Paso 1. Para $\lambda \in [0, 1]$ cualquier solución u es tal que $\|u\|_\infty < r$.

- Paso 2. Existe $R > 0$ tal que para $\lambda \in [0, 1]$ cualquier solución u es tal que $\|u'\|_\infty < R$.

- Paso 3. Existencia de solución para $\lambda = 1$.

$$L(u) := u'' - u,$$
$$N_\lambda(u) := \lambda f(t, \gamma(t, u), u') + \varphi(|u'|)(u - \lambda\gamma(t, u)) - u$$
$$T_\lambda(u) = L^{-1}N_\lambda(u)$$

Por los Pasos 1 y 2 se satisface que la homotopía compacta $I - T_\lambda$ es admisible y por tanto

$$D(I - T_0, \Omega) = D(I - T_1, \Omega),$$

donde $\Omega = \{u \in C^1([0, 2\pi]) : \|u\|_\infty < r, \|u'\|_\infty < R\}$.

Además como T_0 es una aplicación impar se satisface que([8, Theorem 8.3])

$$D(I - T_0, \Omega) \neq 0,$$

y entonces $D(I - T_1, \Omega) \neq 0$ por lo que existe

$$u = T_1 u.$$

- Paso 4. Cualquier solución u para $\lambda = 1$ satisface que $\alpha \leq u \leq \beta$ $(\Rightarrow \gamma(t, u) = u)$.
- Conclusión: existe una solución $u \in \mathcal{C}^2([0, 2\pi])$ con $\alpha \leq u \leq \beta$.

$\square$

Referencias

[1] R. P. Agarwal, M. Meehan y D. O'Regan, *Fixed point theory and applications*, Cambridge University Press, 2001.

[2] H. Amann, *Ordinary differential equations: an introduction to Nonlinear Analysis*, Walter de Gruyter, 1990.

[3] H. Brezis y F. Browder, Partial Differential Equations in the 20th Century, *Advances in Mathematics* 135 (1998), 76–144.

[4] R. F. Brown, *A topological introduction to Nonlinear Analysis*, Birkhäuser, 2004.

[5] A. Cañada y S. Villegas, ¿El Teorema de Bolzano en varias variables?, *La Gaceta de la RSME* 7.1 (2004), 101–121.

[6] J. Cronin, *Fixed points and topological degree in nonlinear analysis*, Mathematical Surveys 11, American Mathematical Society, 1964.

[7] C. De Coster y P. Habets, *Two-point boundary value problems: lower and upper solutions*, Mathematics in Science and Engineering 205, Elsevier, 2006.

[8] K. Deimling, *Nonlinear Functional Analysis*, Springer, 1985.

[9] N. G. Lloyd, *Degree theory*, Cambridge University Press, 1978.

[10] N. G. Lloyd, A survey of degree theory: basis and development, *IEEE Trans. Circuits and Systems* 30 (1983), 607–616

[11] J. Mawhin, Autour du théoreme du point fixe, *Rev. Questions Sci.* 177 (2006), 27–44.

[12] R. Ortega, Aplicaciones del grado topológico en la teoría de estabilidad de soluciones periódicas, *Notas de Matemática* 150, (1994), 23 pág.

[13] R. Ortega, Degree theory and boundary value problems, Curso de doctorado, Trieste, 2006. *Apuntes disponibles en* `http://www.ugr.es/~rortega/PDFs/degree.pdf`.

[14] E. Outerelo y J. M. Ruiz, *Mapping Degree Theory*, Graduate Studies in Mathematics 108, AMS-RSME, 2009.

[15] D. A. Sánchez, *Ordinary differential equations: a brief eclectic tour*, MAA, 2002.

[16] H. W. Siegberg, Some historical remarks concerning degree theory, *Amer. Math. Monthly* 88 (1981), 125–139.

[17] E. Zeidler, *Nonlinear Functional Analysis and its Applications. I Fixed-Point Theorems*, Springer, 1986.