ISSN 1003-3092

数学译林

国际数学进展

MATHEMATICS

Математика

2

MATHEMATIK

2010

mathématiques

中国科学院数学与系统科学研究院
数学研究所《数学译林》编辑委员会

数学译林

第29卷　第2期

目　录

本期责任编委：陆柱家　苗长兴

封面设计：戴树培

$f(x,y)$ 关于 x Lipschitz 连续是否蕴涵着微分方程 $y' = f(x,y)$ 解的唯一性？

José Ángel Cid　Rodrigo López Pouso

1. 引言

一般情况下，标题中问题的答案当然是否定的．但令人惊奇的是，在一个非常有意义的条件下能得到肯定的答案．下面将进行详细的研究．

本文的目的是让尽可能多的数学工作者注意到一个初等结果．它基于关于反函数的微分的定理，它推广了唯一性定理的适用范围．宽泛地说，这个结果将唯一性定理假设中的自变量与因变量的作用互换，从而变成唯一性定理的一个新的形式．这种定理的一个值得注意的例子是第一段中所暗示的 Lipschitz (利普希茨) 定理的一个版本，但是至少有和老的唯一性定理一样多的可能的新的唯一性定理．

下面，我们引入一些记号以便恰当地讨论所考虑的问题．设 $\mathcal{N}$ 是点 $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ 的一个邻域，并设 $f: \mathcal{N} \to \mathbb{R}$ 是一个给定的映射．考虑标量初值问题

$$y' = f(x,y), \quad y(x_0) = y_0. \tag{1.1}$$

我们回忆一下，(1.1) 的一个解 $Y: I \to \mathbb{R}$ 是区间 I 上的一个连续可微函数，使得 $x_0 \in I, Y(x_0) = y_0$, 并且对任意 $x \in I$, 有 $(x, Y(x)) \in \mathcal{N}$ 和 $Y'(x) = f(x, Y(x))$. 如通常一样，我们称 (1.1) 有一个唯一解，若存在 $\alpha > 0$, 使得 (1.1) 在 $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ 上有一个解，并且任何别的解 $Y: I \to \mathbb{R}$ 与此解在 $I \cap [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ 上相同．

在本文中我们假设 f 在 $\mathcal{N}$ 上连续．因此，由 Peano (佩亚诺) 定理知，存在 $\varepsilon > 0$, 使得 (1.1) 在区间 $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ 上至少有一个解．

佩亚诺定理的标量形式发表于 1886 年 [11], 在 1890 年它被推广为方程组的情形 [12].[1)] 当时，佩亚诺已经意识到某些连续函数 f 允许 (1.1) 有多个解．他在 [12] 中给出了下面的例子：

例 1.1 对于 $f(x,y) = 3y^{2/3}$ 和 $x_0 = 0 = y_0$, 问题 (1.1) 有多个解．事实上，通过直接计算验证可知 $Y_1(x) = 0$ 和 $Y_2(x) = x^3$ 都是 (1.1) 在实轴上的解．

Lavrentieff 于 1925 年构造了一个更出人意料的例子，即一个矩形上的连续函数，使得 (1.1) 在以矩形内部的 每个 点 (x_0, y_0) 作为初始条件时，唯一性均不成立 [6]. 1963 年，Hartman 在本杂志发表了一个这种类型的较简单的例子，其中函数定义在整个平面上 [5].

译自：The Amer. Math. Monthly, Vol.116 (2009), No.1, p.61–66, Does Lipschitz with Respect to x Imply Uniqueness for the Differential Equation $y' = f(x,y)$?, José Ángel Cid and Rodrigo López Pouso.

1) 佩亚诺使用他本人的逻辑符号写的这篇文章艰涩难懂. 3 年后, G. Mie 用德文写了较易懂的版本 [8]. ——原注

微分方程的主要用途是为描述许多实际现象和过程提供数学模型. 尤其是那些使人困惑和产生误解的多解存在的情形, 因为它导致我们的研究对象的行为产生不确定性. 此外, 唯一性和不唯一性在理论方面也有许多应用, 比如, 在研究整体解在无穷远处的定性行为时 [13]. 因此, 获得充分的工具来确定一个具体的问题是否有唯一解极其重要.

几乎每一本常微分方程的教科书都包含利普希茨于 1877 年发表的那个众所周知的唯一性定理的一种形式 [7], 亦可见专著 [4, 14]. 下述定理对本文的目的是足够的:

定理 1.1 (利普希茨唯一性定理) *设 $\mathcal{N}$ 是点 $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ 的一个邻域, 并设 $f: \mathcal{N} \to \mathbb{R}$ 在 $\mathcal{N}$ 上连续.*

若 f 在 $\mathcal{N}$ 上关于第 2 个变量满足利普希茨条件, 即

$$\text{存在} L > 0, \text{使得} (x, y), (x, z) \in \mathcal{N} \Longrightarrow |f(x, y) - f(x, z)| \leq L|y - z|, \tag{1.2}$$

那么 (1.1) 有唯一解.

现在要问: f 关于 *第 1* 个 变量满足利普希茨条件是否蕴含着 (1.1) 的解有唯一性? 例 1.1 表明一般情况下这不对. 通常, 问题就到此为止. 但我们敦请读者继续阅读本文的剩余部分, 他将发现若 $f(x_0, y_0) \neq 0$, 我们的答案是肯定的.

2. (不费吹灰之力地 !) 让你所知的唯一性定理翻倍

我们先给一个简单的技术评注. 若 $\mathcal{N}' \subset \mathcal{N}$ 是 (x_0, y_0) 的另一个邻域, 并且问题

$$y' = f_{|\mathcal{N}'}(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

有唯一解, 那么 (1.1) 有唯一解 (这里 $f_{|\mathcal{N}'}$ 表示 f 在 $\mathcal{N}'$ 上的限制). 有了这个观察, 不失一般性, 我们可以在更小的邻域上研究唯一性. 这样做可避免证明过程中的一些技术细节.

下面的定理是本文的核心, 它建立了 (1.1) 的唯一性和与其相关的互补问题唯一性之间的等价性. 这样, 唯一性定理的应用扩展了一倍.

定理 2.1 *设 $\mathcal{N}$ 是点 $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ 的一个邻域, 并设 $f: \mathcal{N} \to \mathbb{R}$ 在 $\mathcal{N}$ 上连续.*

若 $f(x_0, y_0) \neq 0$, 那么 (1.1) 有唯一解, 当且仅当

$$x' = \frac{1}{f(x, y)}, \quad x(y_0) = y_0 \tag{2.3}$$

有唯一解.

证明 由于 $f(x_0, y_0) \neq 0$, 并且 f 在 (x_0, y_0) 处连续, 因此存在 (x_0, y_0) 的一个邻域, 使得 f 在其上恒号且有界. 为简便起见, 假定 f 和 $1/f$ 在 $\mathcal{N}$ 上不变号, 有界.

为建立定理中的结果, 需要如下断言, 此断言本身亦很有趣.

断言 *若 Y 是 (1.1) 的一个解, 则 Y^{-1} 是 (2.3) 的一个解. 反之, 若 X 是 (2.3) 的一个解, 则 X^{-1} 是 (1.1) 的一个解.*

断言的证明 设 $Y: I \to \mathbb{R}$ 是 (1.1) 的一个解; 对任意 $x \in I$, 我们有 $(x, Y(x)) \in \mathcal{N}$ 和 $Y'(x) = f(x, Y(x))$. 故 Y' 在 I 上恒号. 特别, Y 有反函数 $Y^{-1}: Y(I) \to \mathbb{R}$. 我们来证明 $X = Y^{-1}$ 是 (2.3) 的解. 首先, $Y(I)$ 是一个包含 y_0 的区间, 并且 $X(y_0) = x_0$; 其次,

对所有 $y \in Y(I)$, 由反函数的求微商的定理得到

$$X'(y) = (Y^{-1})'(y) = \frac{1}{Y'(Y^{-1}(y))} = \frac{1}{f(X(y),y)}.$$

反方向的证明是类似的，略去．断言证毕．

最后，假定 Y 是 (1.1) 在区间 $I = [x_0-\alpha, x_0+\alpha]$ 上的唯一解，其中 $\alpha > 0$. 我们将证明 Y^{-1} 是 (2.3) 在区间 $J = [y_0-\beta, y_0+\beta]$ 上的唯一解，其中 $\beta > 0$ 充分小，使得 $J \subset Y(I)$, 并且若 X 是 (2.3) 定义在一个 $\tilde{J} \subset J$ 上的任一解，则 $X(\tilde{J}) \subset I$ (由于 $1/f$ 在 $\mathcal{N}$ 上有界，选取这样的 β 是可能的). 设 X 是 (2.3) 是在区间 $\tilde{J} \subset J$ 上的一个解．由于 X^{-1} 是 (1.1) 在 $X(\tilde{J})$ 上的解，并且 $X(\tilde{J}) \subset I$, 故在 $X(\tilde{J})$ 上 $X^{-1} = Y$, 从而在 $(\tilde{J})$ 上 $X = Y^{-1}$. 类似地，可以证明由 (2.3) 解的唯一性蕴含着 (1.1) 解的唯一性． ■

上述等价性定理主要的理论重要性在于当 (1.1) 转换到 (2.3) 时，自变量与因变量的角色相互交换，这样，对因变量的假设条件也转变为自变量的假设条件．

在 $f(x_0,y_0) \neq 0$ 的假设下，由已有的唯一性定理生成新的唯一性定理的计划现在就很简单了：寻找关于 f 的合适条件，使得所选的唯一性定理适用于 (2.3). 下节中我们将用利普希茨定理实施这个计划．

3. 重访利普希茨唯一性定理

本节致力于讨论下面形式的利普希茨唯一性定理，它是定理 1.1 与 2.1 的直接结果．

定理 3.1 *设 $\mathcal{N}$ 是点 $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ 的一个邻域，并设 $f:\mathcal{N} \to \mathbb{R}$ 在 $\mathcal{N}$ 上连续．若 $f(x_0,y_0) \neq 0$, 且 f 关于第 1 个变量在 $\mathcal{N}$ 上满足利普希茨条件，即*

$$\text{存在 } L>0, \text{使得 } (s,y),(x,y) \in \mathcal{N} \Longrightarrow |f(s,y)-f(x,y)| \le L|s-x|, \tag{3.4}$$

那么 (1.1) 有唯一解．

证明 由于 $f(x_0,y_0) \neq 0$, 因此定理 2.1 适用．所以只需证明 (2.3) 有唯一解．为此，注意到 f 连续意味着存在 (x_0,y_0) 的一个邻域，使得在其中 $|f| \ge |f(x_0,y_0)|/2 =: r > 0$. 为简单起见，我们设在 $\mathcal{N}$ 上此不等式成立．故对 $(x,y),(s,y) \in \mathcal{N}$, 有

$$\left|\frac{1}{f(x,y)} - \frac{1}{f(s,y)}\right| = \left|\frac{f(s,y)-f(x,y)}{f(x,y)f(s,y)}\right| \le \frac{L}{r^2}|s-x|,$$

从而定理 1.1 保证了 (2.3) 有唯一解 (注意 (2.3) 中的 x 是因变量). ■

定理 3.1 的一个非常有用的结果与右端连续可微的微分方程有关．

推论 3.1 *设 $\mathcal{N}$ 是点 $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ 的一个邻域，并设 $f:\mathcal{N} \to \mathbb{R}$ 在 $\mathcal{N}$ 上连续．若 $f(x_0,y_0) \neq 0$, 且 $\partial f/\partial x$ 在 $\mathcal{N}$ 上连续，则 (1.1) 有唯一解．*

证明 设 $\mathcal{N}'$ 是 (x_0,y_0) 的一个紧邻域，满足 $\mathcal{N}' \subset \mathcal{N}$, 并设 $L>0$ 是 $|\partial f/\partial x|$ 在 $\mathcal{N}'$ 的一个上界．现对任意 $(x,y),(s,y) \in \mathcal{N}'. x \neq s$, 中值定理保证了严格介于 x 与 s 之间的 r 的存在性，使得

$$|f(x,y)-f(s,y)| = \left|\frac{\partial f}{\partial x}(r,y)\right||x-s| \le L|x-s|.$$

因而，定理 3.1 蕴含着 (1.1) 有唯一解． ■

例 3.1 由推论 3.1, 非线性问题

$$y' = \cos x + x\sqrt[3]{y}, \quad y(0) = 0$$

有唯一解. 注意，方程右端在初值条件的任意邻域内都不满足利普希茨唯一性定理的假设.

前述推论 3.1 的一个重要特例是自治微分方程. 下述经典的佩亚诺唯一性定理 [12] 可由推论 3.1 直接得到.

推论 3.2 设 $\varepsilon > 0$, $g : (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon) \to \mathbb{R}$ 连续, $x_0 \in \mathbb{R}$. 若 $g(y_0) \neq 0$, 则自治系统

$$y' = g(y), \quad y(x_0) = y_0 \tag{3.5}$$

有唯一解.

例 3.2 在非自治情形，单一条件 $f(x_0, y_0) \neq 0$ 不足以保证 (1.1) 解的唯一性. 例如，对例 1.1 中的自治问题 $dz/dx = 3z^{2/3}$, $z(0) = 0$ 做变量变换 $y = z + x$, 得到非自治问题

$$y' = 3(y - x)^{2/3} + 1, \quad y(0) = 0,$$

方程右端在初始数据处不为 0, 并且对所有 $x \in \mathbb{R}$, $Y_1(x) = x$ 和 $Y_2(x) = x^3 + x$ 都是解. 此时方程右端在初始条件的任意邻域内都不满足 (1.2) 和 (3.4).

4. 结束语

1. 定理 2.1 证明过程中的断言为我们提供了一种积分方法，因为即使 (1.1) 不可积, (2.3) 仍可能可积. 事实上，在微分方程研究中，当 $dy/dx = f(x, y)$ 用初等方法不可解时，转而求解 $dx/dy = 1/f(x, y)$ 是一个常用的技巧. 然而，将这种技巧与唯一性相联系的理论应用则是在最近 10 年才得到完全开发.

这个断言更一般的形式由本文作者发表在文献 [3] 中，它用于建立包括定理 3.1 在内的一些结果 ([3], 定理 2.7). 后来, Cid [2] 将定理 3.1 推广到微分方程组的情形.

[2, 3] 发表后，作者才发现 Mortici 的工作 [9, 10]. 就我们所知, Mortici 是得到定理 3.1 的第一人.

2. 大多数唯一性准则都是基于标准的利普希茨条件 (1.2) 的推广 [1], 或者需要一些单调性假设 [15, 16]. 定理 2.1 是在 "y 可转为 x" 的假设下建立所有那些准则的新形式的关键. 这导出许多新的唯一性定理，读者将会发现它们在不同环境中都有用. 对这些即便是最相关的定理的全部叙述已超出本文的范围，但我们给出佩亚诺唯一性准则的类似作为最后一个例子 [1]:

定理 4.1 设 $\mathcal{N}$ 是点 $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ 的一个邻域，并设 $f : \mathcal{N} \to \mathbb{R}$ 在 $\mathcal{N}$ 上连续.

若 $f(x_0, y_0) \neq 0$, 此外，f 关于第 1 个变量单调不减 (即，当 $(s, y), (x, y) \in \mathcal{N}$, $s \leq x$ 时 $f(s, y) \leq f(x, y)$). 则 (1.1) 有唯一解.

致谢、参考文献 (略)

(高燕芳 译　　夏素霞 陆柱家 校)